

INSTYTUT FIZYKI JĄDROWEJ PAN
im. Henryka Niewodniczańskiego
ul. Radzikowskiego 152, 31-342 Kraków

Kraków, wrzesień 2004

Raport Nr 1948/PH

**Ewolucja nieliniowa w chromodynamice kwantowej i jej
zastosowania do produkcji neutrin przy bardzo wysokich
energiach**

Anna Staśto

Rozprawa habilitacyjna - Habilitation thesis

Abstrakt

Praca dotyczy badań nad zjawiskiem saturacji partonowej w zderzeniach cząstek przy wysokich energiach. Zaobserwowane zostało zjawisko skalowania geometrycznego w przekroju czynnym na głębokonieelastyczne zderzenia elektronu z protonem. Skalowanie to może być interpretowane jako przejaw saturacji partonowej. Polega ono na zależności całkowitego przekroju czynnego od jednej zmiennej $\tau \equiv Q^2/Q_s^2(x)$ będącej stosunkiem wirtualności fotonu Q^2 do skali saturacji $Q_s^2(x)$ zależnej potęgowo od x Bjorkena.

Zbadano własności rozwiązania równań ewolucji liniowej DGLAP w przypadku warunków brzegowych ze skalowaniem geometrycznym, które są zadane na linii krytycznej związanej ze skalą saturacji $Q_0 = Q_s(x)$. W przypadku ewolucji z ustaloną stałą sprzężenia skalowanie okazuje się być zachowywane przez ewolucję DGLAP. W obecności biegnącej stałej sprzężenia skalowanie jest łamane ze względu na obecność dodatkowej skali Λ_{QCD} . Wyodrębniono czynnik łamiący to skalowanie, który zanika dla małych wartości x Bjorkena takich, że $Q^2 \ll Q_s^4(x)/\Lambda_{\text{QCD}}^2$.

Zanalizowano numerycznie nieliniowe równanie ewolucji Balitskiego-Kovchegova, które uwzględnia diagramy związane z rekombinacją gluonów i opisuje saturację partonową. Otrzymano rozwiązanie tego równania w przestrzeni pędów w przypadku przybliżenia nieskończonego hadronu ($1 + 1$ wymiarów). W przypadku liniowego równania charakterystyczna jest dyfuzja pędów poprzecznych. Pokazano, że w równaniu nieliniowym dyfuzja do małych pędów jest tłumiona, poprzez obecność skali saturacji $Q_s(x)$. Rozwiązanie w tym obszarze wykazuje własność skalowania geometrycznego. Zanalizowano również wpływ poprawek niewiodących na rozwiązanie tego równania, takich jak biegnąca stała sprzężenia oraz warunek konsystencji. W przypadku rozwiązania tego równania w $3 + 1$ wymiarach okazuje się, że jest generowana potęgowa zależność od parametru zderzenia nawet gdy warunki początkowe wykazują silniejszy spadek. W wyniku tej własności warunek Froissarta-Martina nie jest spełniony mimo tego, że wartość amplitudy jest ograniczona, $N \leq 1$. Rozwiązanie z pełną zależnością od parametru zderzenia posiada symetrię konforemną.

Opracowano metodę umożliwiającą wyodrębnienie elementu macierzy rozpraszania zależnej od parametru zderzenia. W tym celu wykorzystano dane na elastyczną produkcję mezonów wektorowych w zderzeniach głębokonieelastycznych elektronów z protonami. Zależność przekroju czynnego od przekazu pędu t umożliwia otrzymanie profilu macierzy S w parametrze zderzenia. Z analizy tej wynika, że poprawki saturacyjne mogą być już istotne w obszarze kinematycznym akceleratora HERA.

Zanalizowano wpływ poprawek saturacyjnych do produkcji mezonów powabnych w zderzeniach promieni kosmicznych z jądrami atmosfery. Porównano w tym celu trzy modele na rozkłady funkcji gluonów, w tym jeden oparty na modelu saturacji partonowej Golca-Biernata i Wüsthoffa. Następnie z rozwiązań równań transportu wyliczono strumienie neutrin produkowanych z rozpadów mezonów powabnych. Wartość strumienia neutrin okazuje się być około dwa razy mniejsza gdy uwzględnia się saturację partonową.

Abstract

This work is a study of the phenomenon of partonic saturation in the high energy collisions of elementary particles. We have observed the geometric scaling property of the deep inelastic electron-proton cross section which can be interpreted as a signal of partonic saturation. This scaling means that the cross section depends only on one scaling variable $\tau \equiv Q^2/Q_s^2(x)$ which is a ratio of the photon virtuality Q^2 and the saturation scale $Q_s^2(x)$ which depends power-like on Bjorken x .

The properties of the solution to the linear DGLAP evolution equations have been investigated in the presence of the scaling initial conditions. These conditions are given on the critical line defined as $Q_0 = Q_s(x)$. In the fixed strong coupling case scaling is preserved by the DGLAP evolution. When strong coupling is running, geometric scaling is violated because of presence of additional scale Λ_{QCD} . The coefficient responsible for geometric scaling violations has been extracted, which vanishes for very small values of Bjorken x such that $Q^2 \ll Q_s^4(x)/\Lambda_{\text{QCD}}^2$.

We have analysed numerically nonlinear Balitsky-Kovchegov equation, which takes into account diagrams responsible for the gluon recombination and describes partonic saturation. The solution to this equation in the case of the infinitely large target has been obtained ($1 + 1$ dimensions). In the linear case, the solution is plagued by the strong diffusion of the transverse momenta. It turns out that in the nonlinear equation the diffusion to infrared region is strongly suppressed due to the presence of the saturation scale $Q_s(x)$. We have also investigated the impact of the nonleading in x effects in this equation such as running coupling and the consistency constraint. In the case of solution to the Balitsky-Kovchegov equation in $3 + 1$ dimensions the power behaviour in impact parameter is present, even if the initial conditions are exponentially falling. This feature causes violation of the Froissart-Martin bound in the solution to the Balitsky - Kovchegov equation despite the fact that the amplitude is bounded from above $N \leq 1$. We have also checked that the impact parameter dependent solution possesses full conformal symmetry.

The general procedure of extraction of impact parameter dependent S -matrix element has been proposed. To this aim, the data on the elastic diffractive production of vector mesons in deep inelastic ep scattering at small x have been used. The dependence of the cross section on the momentum transfer t has been translated onto the impact parameter dependence of the extracted S matrix element. From this analysis it turns out that the saturation corrections might play quite an important role in the HERA kinematical regime.

Also, the impact of the saturation effects have been studied in the case of the charm meson production in the interactions of high-energy cosmic rays in the atmosphere. We have compared three different calculations based on different models for the gluon densities. Among them we have used a model for the gluon density based on the saturation model by Golec-Biernat and Wüsthoff. Then, we have used the obtained cross sections for charm production to calculate the neutrino fluxes by solving complete transport equations. The resulting atmospheric neutrino flux is reduced in magnitude by about a factor of 2 when the saturation effects are included.

Spis treści

1	Wprowadzenie	5
2	Unitarność i warunek Froissarta-Martina	7
3	Saturacja perturbacyjna	8
3.1	Model saturacji	8
3.2	Skalowanie geometryczne	10
3.3	Skalowanie geometryczne a ewolucja DGLAP	12
4	Nieliniowe równania ewolucji	14
4.1	Równanie Balitskiego-Kovchegova	15
4.2	Rozwiązanie w 1+1 wymiarach	16
4.3	Rozwiązanie w 3+1 wymiarach	20
5	Obserwacje poprawek unitarnych w rozpraszaniu głębokonieelastycznym	23
5.1	Dyfrakcyjna elastyczna produkcja mezonów wektorowych	24
5.2	Element macierzy S w funkcji parametru zderzenia	25
6	Zastosowanie modelu saturacji: produkcja neutrin w atmosferze przy wysokich energiach	27
6.1	Przekroje czynne na produkcję ciężkich kwarków w zderzeniach pp i pA	27
6.2	Strumienie neutrin	30
7	Zakończenie	31

1 Wprowadzenie

Jednym z najbardziej istotnych zagadnień w fizyce cząstek elementarnych jest zrozumienie zależności przekrojów czynnych od energii. Chromodynamika kwantowa przewiduje, że zderzenia cząstek w granicy wysokich energii są kontrolowane przez wymianę Pomeronu, obiektu o liczbach kwantowych próżni. W perturbacyjnym rachunku Pomeron jest obiektem złożonym z tak zwanych zreggeizowanych gluonów i jest opisywany równaniem BFKL [1]. Rozwiązanie tego równania - funkcja rozkładu gluonów - wykazuje potęgowy wzrost z energią. Takie zachowanie funkcji gęstości gluonów przekłada się następnie na zależność od energii całkowitego przekroju czynnego. Okazuje się, że tego typu zależność jest zbyt silna aby poprawnie opisać dane eksperymentalne dla funkcji struktury z akceleratora HERA [2]. Niewiodące poprawki [3] do równania są bardzo duże, jednakże potęgowa zależność od energii jest nadal zachowana. Gdy gęstość gluonów jest bardzo wysoka, rzędu odwrotności stałej sprzężenia oddziaływania silnego $\sim 1/\alpha_s$, wówczas musi zostać uwzględniony proces ich rekombinacji. Zjawisko to prowadzi do osłabienia wzrostu gęstości gluonów i w konsekwencji spowolnienia wzrostu przekroju czynnego z energią. Proces ten nazywamy *saturacją partonową* i był on po raz pierwszy omawiany w pracy [4]. W szczególności zapostulowano tam nowego typu równanie ewolucji na funkcję rozkładu gęstości gluonów, które obok standardowego członu liniowego zawierało również ujemny człon proporcjonalny do kwadratu funkcji gęstości gluonów. Ta dodatkowa, nieliniowa modyfikacja równania ewolucji odpowiadała za rekombinację gluonów i powodowała osłabienie wzrostu funkcji rozkładu gluonów. Motywacją dla studiów nad partonową saturacją w chromodynamice kwantowej jest warunek unitarności dla amplitudy rozpraszania. Wiadomo, że ograniczenie Froissarta-Martina [5, 6] na zależność od energii przekrojów czynnych na zderzenia hadronów wynika właśnie z założenia o unitarności macierzy rozpraszania. Ograniczenie Froissarta-Martina dopuszcza co najwyżej logarytmiczny wzrost przekroju czynnego z energią. Należy jednak pamiętać o tym, że saturacja partonowa jest zjawiskiem, które można opisać technikami perturbacyjnej chromodynamiki kwantowej natomiast unitarność i ograniczenie Froissarta-Martina odnoszą się do zderzeń hadronów i są prawdziwe w odniesieniu do całej teorii oddziaływań silnych, włącznie z efektami długozasięgowymi.

W ostatnich latach nastąpił szybki rozwój badań skupiających się właśnie na problemie saturacji partonowej oraz warunku unitarności w QCD. Powstaje między innymi pytanie, w jaki sposób należy modyfikować ewolucję rozkładu partonów aby uwzględnić możliwość ich rekombinacji.

W przedstawionej rozprawie zanalizowano teoretyczne i fenomenologiczne aspekty zagadnienia saturacji partonowej w chromodynamice kwantowej.

Rozprawę stanowią następujące publikacje:

- I. *Geometric scaling for the total γ^*p cross section in the low x region*
A.M. Staśto, K. Golec-Biernat, J. Kwieciński
Physical Review Letters **86** (2001) 596

- II.** *Geometric scaling and QCD evolution*
 J. Kwieciński, A.M. Staśto
 Physical Review D **66** (2002) 014013
- III.** *Diffusion into infrared and unitarization of the Balitsky-Fadin-Kuraev-Lipatov-Pomeron*
 K. Golec-Biernat, L. Motyka, A.M. Staśto
 Physical Review D **65** (2002) 074037
- IV.** *On solutions of the Balitsky-Kovchegov equation with impact parameter*
 K. Golec-Biernat, A.M. Staśto
 Nuclear Physics B **668** (2003) 345
- V.** *Impact parameter dependent S-matrix for dipole-proton scattering from diffractive meson electroproduction*
 S. Munier, A.M. Staśto, A.H. Mueller
 Nuclear Physics B **603** (2001) 427
- VI.** *Prompt neutrinos from atmospheric $c\bar{c}$ and $b\bar{b}$ and the gluon at very small x*
 A.D. Martin, M.G. Ryskin, A.M. Staśto
 Acta Physica Polonica B **34** Vol. 6, (2003) 3273
- VII.** *Ultrahigh energy neutrino physics*
 A.M. Staśto
 International Journal of Modern Physics A, Vol. 19 No. 3 (2004) 317

W publikacjach skupiono się przede wszystkim na studiowaniu zagadnienia saturacji partonowej, która jest powszechnie uważana za możliwy mechanizm prowadzący do zachowania unitarności w perturbacyjnej chromodynamice kwantowej. W pracach **I** i **II** skoncentrowano się na badaniu zjawiska tak zwanego *skalowania geometrycznego*, które jest związane z występowaniem jednej charakterystycznej skali, *skali saturacji* w bardzo gęstych układach partonowych. Zanalizowano również szczegółowo nieliniowe równanie ewolucji Balitskiego-Kovchegova (prace **III** i **IV**), które prowadzi do saturacji rozkładu gęstości partonów. W szczególności pokazano, że równanie to nie spełnia warunku Froissarta-Martina ze względu na obecność długozasięgowego oddziaływania. Aby ten warunek był spełniony, wymagana jest dodatkowa modyfikacja tego równania, polegająca na wprowadzeniu nieperturbacyjnej skali charakteryzującej zasięg oddziaływania. Ponadto w pracach **V-VII** badano wpływ efektów saturacji na mierzone przekroje czynne. W pracy **V** opracowano metodę oszacowania efektów saturacji w procesie elastycznej, dyfrakcyjnej produkcji mezonów w rozpraszaniu głębokonieelastycznym elektronu na protonie. W pracach **VI** i **VII** zajmowano się wpływem efektów nieliniowych w ewolucji na przekroje czynne na produkcję neutrin w atmosferze. Neutrina te są produkowane w zderzeniach promieni kosmicznych z jądrami w atmosferze przy bardzo wysokich energiach. Okazuje się, że poprawki od saturacji partonowej mają istotny wpływ na wartość przekroju czynnego tych procesów, a co za tym idzie również na wielkość produkowanego strumienia neutrin.

Poniższy przewodnik zawiera streszczenia publikacji **I-VII**, jak również krótkie wprowadzenie do zagadnienia unitarności oraz saturacji partonowej.

2 Unitarność i warunek Froissarta-Martina

Jak wspomniano już wcześniej, unitarność i warunek Froissarta-Martina są motywacją dla szerokich studiów nad problemem saturacji partonowej w chromodynamice kwantowej. Ograniczenie Froissarta-Martina zostało wyprowadzone z bardzo ogólnych założeń dla oddziaływań silnych i dotyczy zderzeń hadronów. A zatem odnosi się do kompletnej teorii oddziaływań silnych, zawierającej zarówno lepiej znaną część perturbacyjną oraz mało znaną część nieperturbacyjną. W szczególności warunek Froissarta-Martina opiera się na założeniu skończonego zasięgu oddziaływań silnych, związanego z nieperturbacyjnym zjawiskiem uwięzienia. Mimo iż saturacja partonowa jest zjawiskiem perturbacyjnym to warto przypomnieć tutaj dwa główne założenia użyte do wyprowadzenia warunku Froissarta-Martina, gdyż będą one istotne w kontekście pracy **V** omawianej w rozdziale 4.3.

Warunek Froissarta-Martina [5, 6] na zachowanie się hadronowego przekroju czynnego ma następującą postać

$$\sigma(s) \leq c \ln^2 s, \quad (1)$$

gdzie stała normalizacja jest związana z zasięgiem oddziaływania, $c \sim 1/m_\pi^2$.

Pierwszy, intuicyjny argument, z którego zostało wprowadzone ograniczenie (1) został podany przez Heisenberga w pracy [7].

Poniżej przypomnę pokrótce, jakie istotne założenia, patrz [5], są potrzebne do wyprowadzenia ograniczenia Froissarta-Martina (1).

Pierwszym, jest tak zwany warunek unitarności na macierz rozpraszania. Macierz rozpraszania S jest zdefiniowana w taki sposób, że jej element wzięty między stanem początkowym i końcowym daje prawdopodobieństwo P_{fi} , takie że stan końcowy $|f\rangle$ pochodzi ze stanu początkowego $|i\rangle$

$$P_{fi} = |\langle f|S|i\rangle|^2 = \langle i|S^\dagger|f\rangle\langle f|S|i\rangle. \quad (2)$$

Warunek unitarności mówi, że prawdopodobieństwo, że startując ze stanu początkowego $|i\rangle$ otrzymamy jakikolwiek stan końcowy jest równe 1

$$\sum_m P_{mi} = \sum_m |\langle m|S|i\rangle|^2 = \sum_m \langle i|S^\dagger|m\rangle\langle m|S|i\rangle = \langle i|S^\dagger S|i\rangle = 1, \\ S^\dagger S = S S^\dagger = 1, \quad (3)$$

gdzie założyliśmy, że stany $|m\rangle$ tworzą ortonormalną bazę stanów spełniającą relację kompletności

$$\sum_m |m\rangle\langle m| = 1.$$

Drugim istotnym warunkiem jest założenie o krótkozasięgowości oddziaływań. To umożliwi zdefiniowanie asymptotycznych stanów swobodnych cząstek, które są daleko

od siebie i nie oddziałują. Oznacza to też, że musi istnieć skala, która charakteryzuje zasięg oddziaływań. W przypadku oddziaływań silnych zasięg jest rzędu odwrotności masy pionu

$$R \sim 1/m_\pi .$$

Korzystając z tych dwóch założeń równocześnie oraz z rozkładu amplitudy na fale parcjalne, można wyprowadzić ograniczenie (1), patrz np. [8]. Ograniczenie Froissarta-Martina powinno być spełnione przez kompletną teorię QCD.

3 Saturacja perturbacyjna

3.1 Model saturacji

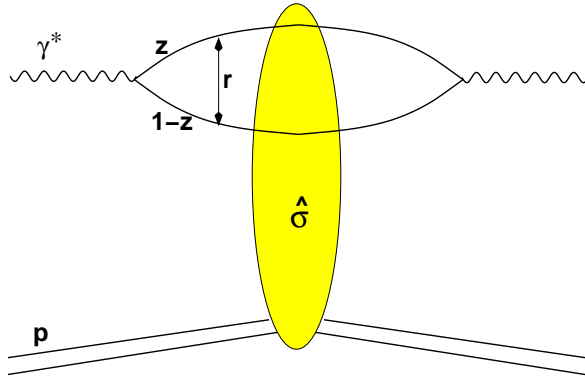
Partonowa saturacja została po raz pierwszy zanalizowana w pracy [4]. Ideą partonowej saturacji jest uwzględnienie w ewolucji chromodynamicznej nie tylko produkcji gluonów (jak to jest w standardowej ewolucji DGLAP czy BFKL) ale również możliwości ich rekombinacji, w momencie kiedy ich rozkład osiąga znaczną gęstość. W pracy [4] zaproponowano wówczas nowe równanie ewolucji dla funkcji rozkładu gluonów, które obok standardowego członu liniowego, zawierało również ujemny człon nieliniowy proporcjonalny do kwadratu gęstości funkcji rozkładu gluonów. W ten sposób silny wzrost z energią funkcji rozkładu gluonów był tłumiony.

Poniżej przedstawię fenomenologiczny model Golca-Biernata i Wusthoffa (GBW) [9], który dobrze ilustruje ideę i własności saturacji partonowej. Model ten został sformułowany w obrazie dipolowym, patrz Fig.1, do opisu całkowitego przekroju czynnego na rozpraszanie wirtualnego fotonu na hadronie

$$\sigma_{T,L}^{\gamma^*p}(x, Q^2) = \int d^2\mathbf{r} \int_0^1 dz |\Psi_{T,L}(r, z, Q^2)|^2 \hat{\sigma}(r, x) . \quad (4)$$

$\Psi_{T,L}$ jest funkcją falową fotonu jako obiektu składającego się z pary kwark-antykwar (dipola). Indeksy T, L oznaczają odpowiednio poprzeczną i podłużną polaryzację fotonu wirtualnego. Wielkość $\hat{\sigma}(r, x)$ jest dipolowym przekrojem czynnym na rozpraszanie dipola o poprzecznym rozmiarze \mathbf{r} na hadronie. Zmienne Q^2, x, z to odpowiednio wirtualność fotonu, zmienna Bjorkena $x = Q^2/s$ (\sqrt{s} całkowita energia w środku masy) i część podłużnego pędu fotonu niesiona przez wyprodukowany kwark. Faktoryzacja opisana wzorem (4) jest słuszna wtedy gdy energia procesu rozpraszania $\gamma^* - proton$ jest duża, lub odpowiednio gdy x jest bardzo małe. Wówczas rozpraszanie $\gamma^* - proton$ można rozpatrywać jako dobrze rozdzielone procesy: fluktuacji $\gamma^* \rightarrow q\bar{q}$ a następnie oddziaływania tego dipola ($q\bar{q}$) z protonem, opisanego przez przekrój czynny $\hat{\sigma}$. Funkcje falowe fotonu $\Psi_{T,L}$, są wielkościami, które można wyliczyć z chromodynamiki kwantowej i mają następującą postać

$$\begin{aligned} |\Psi_T|^2 &= \frac{2\alpha_{em}}{2\pi^2} \sum_f e_f^2 \{ [z^2 + (1-z)^2] \bar{Q}_f^2 K_1^2(\bar{Q}_f r) + m_f^2 K_0^2(\bar{Q}_f r) \} , \\ |\Psi_L|^2 &= \frac{2\alpha_{em}}{2\pi^2} \sum_f e_f^2 \{ 4Q^2 z^2 (1-z)^2 K_0^2(\bar{Q}_f r) \} , \end{aligned} \quad (5)$$



Rysunek 1: Diagram przedstawiający rozpraszanie fotonu wirtualnego γ^* na protonie w obrazie dipolowym.

gdzie $\bar{Q}_f^2 = z(1-z)Q^2 + m_f^2$ natomiast sumy wykonane są po wszystkich zapachach kwarków, o ładunkach e_f i masie m_f . Dipolowy przekrój czynny $\hat{\sigma}(x, r)$ jest wielkością, która zawiera wszystkie informacje o oddziaływaniu jakie zachodzi między dipolem a hadronem. Dla małych rozmiarów dipola r przekrój ten można wyliczyć z równań chromodynamicznej ewolucji. Dla dużych wartości r , a więc w obszarze nieperturbacyjnym dipolowy przekrój czynny jest mało znany. W modelu GBW [9] zapostulowano następującą postać dipolowego przekroju czynnego

$$\hat{\sigma}(r, x) = \sigma_0 \left(1 - e^{-\frac{r^2 Q_s^2(x)}{4}}\right), \quad (6)$$

gdzie σ_0 jest stałą normalizacją natomiast $Q_s(x)$ jest wymiarową wielkością, tak zwaną *skalą saturacji*, zależną od x . W modelu GBW zakłada się, że skala saturacji zależy potęgowo od x

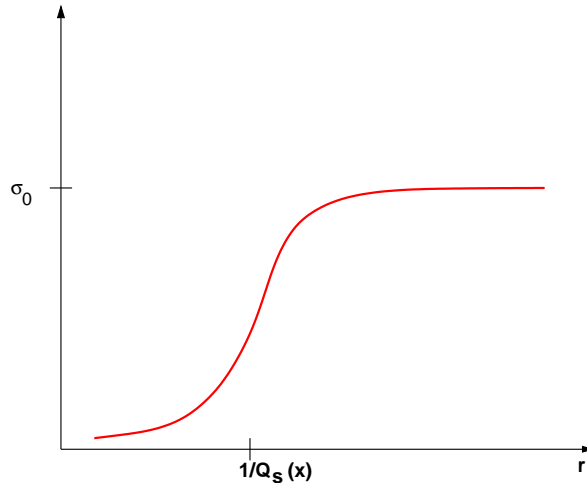
$$Q_s(x) = Q_0 \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\lambda/2}. \quad (7)$$

Parametry modelu zostały dobrane tak, aby uzyskać najlepsze dopasowanie do danych eksperymentalnych dla funkcji struktury protonu F_2

$$Q_0 = 1 \text{ GeV}, \quad x_0 = 3 \times 10^{-4}, \quad \sigma_0 = 29 \text{ mb}, \quad \lambda = 0.288. \quad (8)$$

Bardzo interesujące są własności modelu saturacji GBW, rysunek 2. Dla małych dipoli, takich że $r < 1/Q_s(x)$, dipolowy przekrój czynny zachowuje się w przybliżeniu proporcjonalnie do kwadratu wielkości dipola $\hat{\sigma} \simeq r^2 Q_s^2(x)/4$, a jednocześnie rośnie szybko z energią. Jest to obszar, w którym obowiązuje standardowa liniowa ewolucja chromodynamiczna. Z kolei w obszarze dużych dipoli, gdzie $r > 1/Q_s(x)$, przekrój czynny dąży do uniwersalnej stałej $\hat{\sigma} \rightarrow \sigma_0$, mówimy wtedy, że nastąpiła *saturacja partonowa*: gęstość gluonów osiągnęła pewną krytyczną wartość i ani wzrost rozmiaru dipola ani wzrost energii nie powoduje wzrostu dipolowego przekroju czynnego¹. Interesującą cechą modelu GBW jest to, że krytyczny rozmiar dipola $R_s(x) \equiv 1/Q_s(x)$

¹Ściślej mówiąc granica unitarności dopuszcza logarytmiczny wzrost z malejącym x dipolowego przekroju czynnego tj. $\sigma_0 \simeq \ln 1/x$. Jest to związane z rozszerzaniem się obszaru interakcji w parametrze zderzenia o czym będzie mowa w dalszym rozdziale.



Rysunek 2: Dipolowy przekrój czynny $\hat{\sigma}(r, x)$ z modelu saturacji GBW (6), w funkcji rozmiaru dipola r .

dla którego następuje saturacja przekroju czynnego zmniejsza się z energią, a zatem przy wyższych energiach (czyli mniejszych wartościach x) saturacja następuje dla coraz mniejszych rozmiarów dipoli.

Model saturacji GBW został z dużym powodzeniem zastosowany do opisu danych dla funkcji struktury protonu F_2 jak również do opisu danych dyfrakcyjnych [9]. Przewiduje on na przykład stały w energii stosunek dyfrakcyjnego przekroju czynnego do całkowitego co jest obserwowane doświadczalnie.

3.2 Skalowanie geometryczne

Interesującą własnością dipolowego przekroju czynnego $\hat{\sigma}(r, x)$ w modelu saturacji GBW jest fakt, że zależy on tylko od jednej bezwymiarowej zmiennej $rQ_s(x)$, patrz równanie (6). To założenie ma istotne konsekwencje na zachowanie się całkowitego przekroju czynnego dla zderzenia wirtualnego fotonu z protonem σ^{γ^*p} . Jeżeli w równaniu (4) zmieni się zmienne $r \rightarrow \hat{r} = rQ_s(x)$ to wówczas po wycalkowaniu po \hat{r} okazuje się, że σ^{γ^*p} również zależy wyłącznie od jednej zmiennej

$$\sigma^{\gamma^*p}(x, Q^2) = \sigma(\tau), \quad (9)$$

gdzie

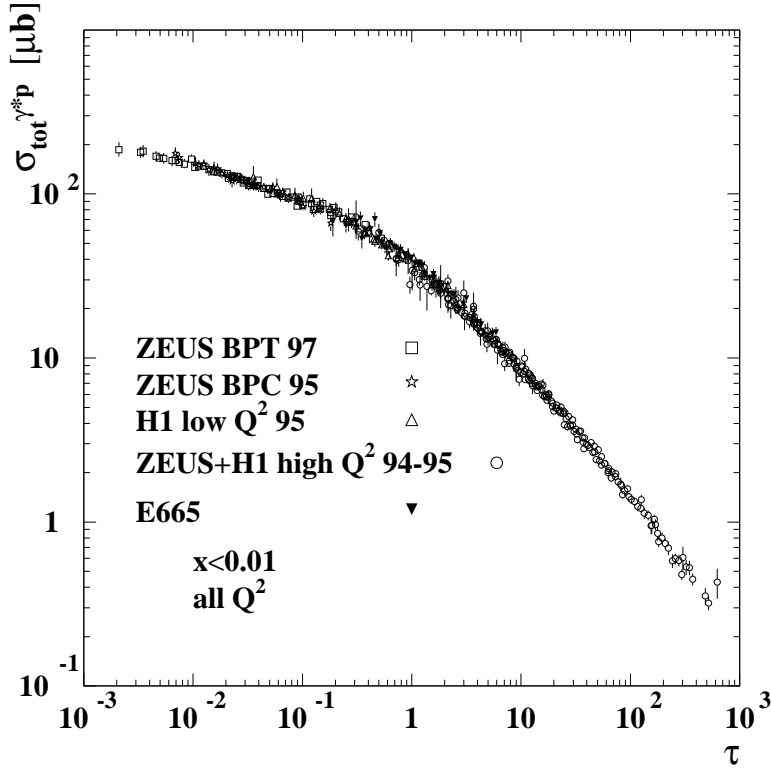
$$\tau = Q^2/Q_s^2(x). \quad (10)$$

Można łatwo sprawdzić, że całkowity przekrój czynny zachowuje się w następujący sposób

$$\sigma^{\gamma^*p} \sim \sigma_0 \ln(1/t) \quad \text{gdy} \quad \tau \rightarrow 0, \quad (11)$$

oraz

$$\sigma^{\gamma^*p} \sim \sigma_0 \ln(t)/\tau \quad \text{gdy} \quad \tau \rightarrow \infty. \quad (12)$$



Rysunek 3: Doświadczalnie mierzony całkowity przekrój czynny σ^{γ^*p} w funkcji zmiennej skalowania $\tau = Q^2/Q_s^2(x)$. Dane są z obszaru wartości $x < 0.01$.

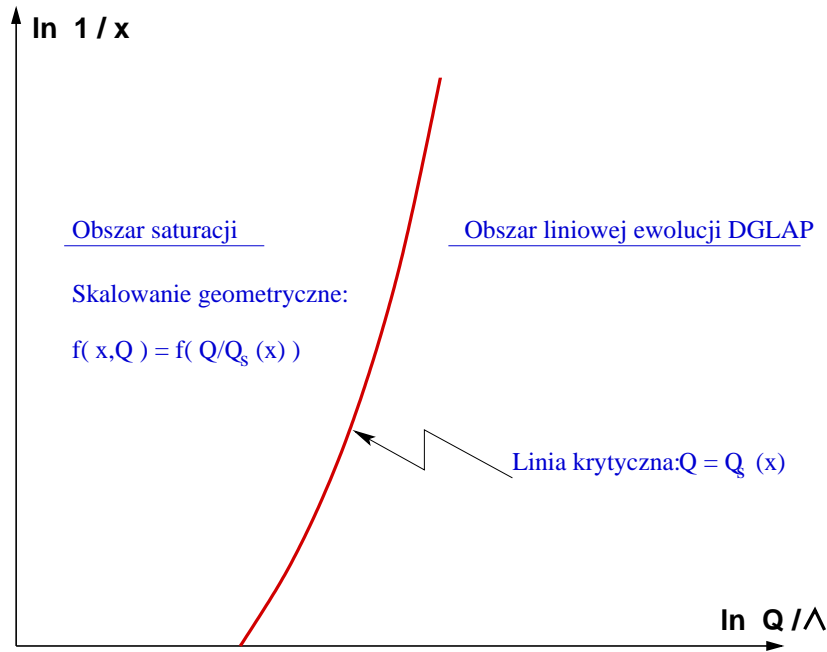
Celem pracy I było pokazanie, że istotnie dane eksperymentalne wykazują regularność skalowania. Na rysunku 3 pokazano dane dla całkowitego przekroju czynnego w funkcji zmiennej skalującej $\tau = Q^2/Q_s^2(x)$, dla obszaru, w którym $x < 0.01$. Widać wyraźnie, że dane układają się na jednej krzywej wykazując przybliżone skalowanie. Zachowanie przekroju czynnego jak $1/\tau$ dla dużych τ odpowiada zachowaniu $F_2 \sim \sigma/Q^2 \sim x^{-\lambda}$ dla funkcji struktury protonu. Natomiast dla małych wartości τ , jest widoczny tylko logarytmiczny wzrost z energią, $\sigma \sim \ln 1/x$.

Należy podkreślić, że zjawisko geometrycznego skalowania jest widoczne tylko dla danych z obszaru małych wartości x . Dla dużych wartości x skalowanie to jest silnie łamane.

Skalowanie geometryczne jest nie tylko szczególną własnością modelu GBW. Wynika ono z istnienia specyficznej skali, skali saturacji, która jest granicą kinematyczną gęstego układu partonowego. Skalowanie jest również obserwowane w innych teoretycznych modelach opisujących gęste układy partonowe (np. w teorii Color Glass Condensate [10, 11]). Pojawia się ono na przykład w saturacyjnym obszarze rozwiązania nieliniowego równania ewolucji Balitskiego-Kovchegova [12, 13], o którym będzie mowa w dalszych rozdziałach.

3.3 Skalowanie geometryczne a ewolucja DGLAP

Skalowanie geometryczne zostało zaobserwowane dla danych na całkowity przekrój czynny na zderzenie wirtualnego fotonu z protonem przy małych wartościach x Bjorkena. Jednocześnie te dane są bardzo dobrze opisywane przez równania ewolucji chromodynamicznej DGLAP, patrz np. [14], która nie posiada tej własności. Powstaje więc pytanie w jaki sposób liniowa ewolucja DGLAP może być zgodna ze skalowaniem geometrycznym charakterystycznym dla gęstych układów partonowych. Diagram na rysunku 4 przedstawia schematyczny podział w przestrzeni (x, Q^2) na dwa obszary. Pierwszy, w którym $Q < Q_s(x)$, to obszar gdzie gęstość partonów jest duża, poprawki nieliniowe są istotne w ewolucji i występuje skalowanie. W drugim obszarze gdzie $Q > Q_s(x)$, obowiązuje standardowa ewolucja liniowa DGLAP. Granicą tych dwóch obszarów jest skala saturacji $Q_s(x)$. Celem pracy II była analiza wpływu warunków brzegowych zadanych na linii krytycznej $Q_{\text{initial}} = Q_s(x)$ na ewolucję DGLAP w obszarze $Q > Q_s(x)$. W szczególności, w jaki sposób skalowanie w obszarze $Q \leq Q_s$



Rysunek 4: Diagram fazowy w przestrzeni $(\ln 1/x, \ln Q/\Lambda)$. Linia krytyczna $Q = Q_s(x)$ dzieli przestrzeń na obszar saturacji i skalowania (na lewo od tej linii) oraz obszar liniowej ewolucji DGLAP (na prawo).

propaguje się do obszaru $Q > Q_s$ i czy jest zachowywane przez ewolucję DGLAP.

Standardowe równanie ewolucji DGLAP ma następującą postać

$$\frac{\partial xg(x, Q^2)}{\partial \ln(Q^2/\Lambda^2)} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} P_{gg}(z) xg(x/z, Q^2), \quad (13)$$

gdzie P_{gg} jest funkcją przejścia (*splitting*) gluon \rightarrow gluon, natomiast $xg(x, Q^2)$ jest prze-calkowanym rozkładem gęstości gluonów. W przestrzeni momentów Mellina równanie

to przyjmuje następującą postać

$$\frac{\partial g_\omega(Q^2)}{\partial \ln(Q^2/\Lambda^2)} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \gamma_{gg}(\omega) g_\omega(Q^2), \quad (14)$$

gdzie transformata Mellina została zdefiniowana w następujący sposób

$$g_\omega(Q^2) = \int_0^1 dx x^\omega g(x, Q^2), \quad (15)$$

i wymiar anomalny γ_{gg} jest zdefiniowany jako $\gamma_{gg}(\omega) = \int_0^1 dz z^\omega P_{gg}(z)$. Interesuje nas znalezienie rozwiązania równania ewolucji (13) dla warunków brzegowych spełniających warunek skalowania geometrycznego

$$\frac{\alpha_s}{2\pi} x g(x, Q^2 = Q_s^2(x)) = \frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{r^0}{Q_0^2} Q_s^2(x), \quad (16)$$

gdzie skala saturacji jest dana $Q_s^2(x) = Q_0^2 x^{-\lambda}$. Parametr r^0 jest normalizacją funkcji rozkładu gluonów.

Ten warunek brzegowy (16) dla $xg(x, Q^2)$ wynika z własności skalowania geometrycznego dla dipolowego przekroju czynnego

$$\hat{\sigma}(r = 1/Q, x) \sim \alpha_s x g(x, Q^2)/Q^2 = F(Q/Q_s(x)). \quad (17)$$

W pracy **II** pokazano, że w przypadku ustalonej stałej sprzężenia α_s , otrzymuje się następujące rozwiązanie równania (13) z warunkami brzegowymi (16)

$$\frac{\alpha_s}{2\pi} \frac{xg(x, Q^2)}{Q^2} \simeq \frac{r^0}{Q_0^2} \frac{\alpha_s}{2\pi} \left(\frac{Q^2}{Q_s^2(x)} \right)^{\frac{\alpha_s}{2\pi} \gamma_{gg}(\omega_0) - 1}. \quad (18)$$

Rozwiązanie (18) wykazuje własność geometrycznego skalowania, to znaczy jest funkcją tylko jednej zmiennej $Q^2/Q_s^2(x)$ dla $Q^2 > Q_s^2(x)$. Wartość ω_0 jest dana przez rozwiązanie następującego równania

$$\lambda = \omega_0 + \lambda \frac{\alpha_s}{2\pi} \gamma_{gg}(\omega_0). \quad (19)$$

A zatem w przypadku ustalonej stałej sprzężenia α_s , ewolucja liniowa DGLAP będzie zachowywała skalowanie geometryczne dla $Q^2 > Q_s^2(x)$ zadane w warunkach początkowych $Q_{\text{initial}}^2 = Q_s^2(x)$.

Oczywiście bardziej realistycznym przypadkiem jest ewolucja z biegnącą stałą sprzężenia QCD. W tym przypadku można oczekiwać, iż skalowanie będzie łamane ze względu na obecność skali Λ_{QCD} .

Równanie ewolucji dla funkcji rozkładu gluonów w przestrzeni Mellina z biegnącą stałą sprzężenia ma następującą postać

$$\frac{\partial g_\omega(Q^2)}{\partial \ln(Q^2/\Lambda^2)} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \gamma_{gg}(\omega) g_\omega(Q^2), \quad (20)$$

gdzie biegnąca stała sprzężenia jest dana wzorem

$$\frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} = \frac{b}{\ln(Q^2/\Lambda_{\text{QCD}}^2)}, \quad (21)$$

a $b = 2/(11 - 2/3N_f)$. Postępując analogicznie jak w przypadku ustalonej stałej sprzężenia można pokazać, (patrz praca **II**), że rozwiązaniem dla funkcji rozkładu gluonów z warunkami brzegowymi zadanymi na skali saturacji jest

$$\frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \frac{xg(x, Q^2)}{Q^2} = \frac{r^0}{Q_0^2} \frac{Q_s^2(x)}{Q^2} \left[1 + \frac{\alpha_s(Q_s^2(x))}{2\pi b} \ln(Q^2/Q_s^2(x)) \right]^{b\gamma_{gg}(\lambda)-1}, \quad (22)$$

Z powyższego wzoru wynika, że skalowanie geometryczne nie jest już zachowywane dla $Q^2 > Q_s^2(x)$ i jego łamanie jest proporcjonalne do stałej sprzężenia $\alpha_s(Q_s^2(x))$. Tylko w obszarze gdzie $\alpha_s(Q_s(x)) \ln[Q^2/Q_s^2(x)] \ll 1$ skalowanie geometryczne jest w przybliżeniu zachowane².

Zachowanie skalowania w obszarze liniowym $Q > Q_s(x)$ zostało również zanalizowane w sposób numeryczny w pracy **II**. Studiując następujące wyrażenie

$$\Delta(Y = \ln 1/x, \tau = Q^2/Q_s^2(x)) = \frac{1}{h} \frac{\partial h(Y, \tau)}{\partial Y} \Big|_{\tau=\text{fixed}}, \quad (23)$$

gdzie

$$h(Y, \tau) \equiv \frac{\alpha_s}{Q^2} xg(x, Q^2), \quad (24)$$

można łatwo zidentyfikować obszar skalowania i jego łamania. Pochodna zdefiniowana wzorem (23) znika dla obszaru skalowania gdyż tam $h(Y, \tau) = h(\tau)$. Na rysunku 5 pokazano pochodną (23) w funkcji rapidity $Y = \ln 1/x$ przy ustalonych wartościach zmiennej skalującej τ .

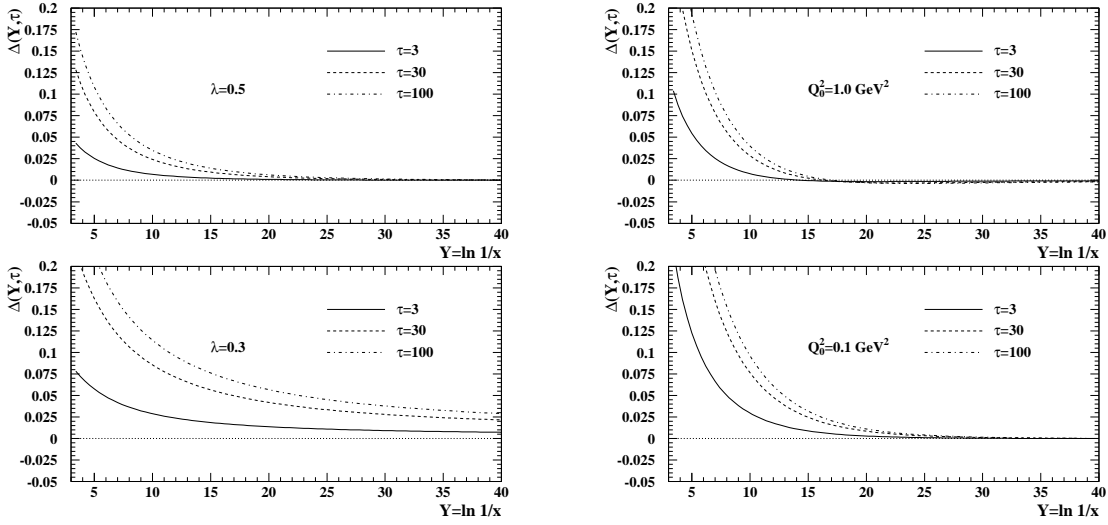
Widać wyraźne skalowanie dla dużych wartości rapidity Y^3 . Oczywiście graniczna wartość Y , od której zaczyna się skalowanie jest zależna od wartości zmiennej skalującej τ . Z rysunku wynika też, że w przypadku ustalonej stałej sprzężenia mimo iż wyrażenie (18) wykazuje skalowanie dla dowolnych $Q^2 > Q_s^2(x)$ to jednak dla dużych wartości x jest ono łamane. Wynika to z tego, że w wyprowadzeniu wzoru (18) zostały zaniedbane człony, które łamią skalowanie, a które są niewiódące dla małych wartości x . Podobna sytuacja jest również w przypadku biegnącej stałej sprzężenia, gdzie obserwujemy obszar skalowania dla dużych rapidity Y i obszar łamania skalowania dla mniejszych wartości Y .

4 Nieliniowe równania ewolucji

W poprzednich rozdziałach zajmowaliśmy się efektami saturacyjnymi, które były uwzględniane w sposób modelowy: parametryzacja GBW, czy też warunki brzegowe

²Analogiczny wynik został też uzyskany w pracy [15].

³Łamanie skalowania dla przypadku gdy $\lambda = 0.3$ jest związane z istnieniem krytycznej wartości λ_{crit} , poniżej której nie ma skalowania. Wynika to z własności rozwiązania równania (19).



Rysunek 5: Pochodna $\Delta(Y, \tau)$ z równania (23) jako funkcja rapidity Y dla różnych wartości zmiennej skalującej τ . Rysunek lewy: ustalona wartość stałej sprzężenia, prawy rysunek: bieżąca stała sprzężenia.

ze skalą saturacji. Obecnie zajmiemy się bliżej własnościami nieliniowych równań ewolucji, które zawierają efekty saturacyjne poprzez uwzględnienie diagramów ze sprzężeniami trójpomeronowymi.

4.1 Równanie Balitskiego-Kovchegova

Równanie Balitskiego-Kovchegova (BK) [12, 13] jest nieliniowym równaniem ewolucji na amplitudę rozpraszania dipola kwark-antykwarł na hadronie i ma następującą postać

$$\frac{\partial N(\mathbf{r}, \mathbf{b}; Y)}{\partial Y} = \bar{\alpha}_s \int \frac{d^2 \mathbf{r}'}{2\pi} \frac{r^2}{r'^2 (\mathbf{r} + \mathbf{r}')^2} \left[N(\mathbf{r} + \mathbf{r}', \mathbf{b} + \frac{\mathbf{r}'}{2}; Y) + N(\mathbf{r}', \mathbf{b} + \frac{\mathbf{r} + \mathbf{r}'}{2}; Y) - N(\mathbf{r}, \mathbf{b}; Y) - N(\mathbf{r} + \mathbf{r}', \mathbf{b} + \frac{\mathbf{r}'}{2}; Y) N(\mathbf{r}', \mathbf{b} + \frac{\mathbf{r} + \mathbf{r}'}{2}; Y) \right], \quad (25)$$

gdzie $\bar{\alpha}_s = \alpha_s N_c / \pi$, wektor \mathbf{b} jest parametrem zderzenia dla dipola o rozmiarze \mathbf{r} natomiast $Y = \ln 1/x$ jest to rapidity dla tego procesu. Część liniowa (pierwsze trzy człony po prawej stronie równania) stanowi dipolową wersję liniowego równania BFKL wyprowadzoną w [16]. Człon nieliniowy uwzględnia wielokrotnie rozpraszania więcej niż jednego dipola na hadronie⁴. Równanie (25) jest też często używane w równoważnej

⁴Ścisłej biorąc równanie BK zostało wyprowadzone dla rozpraszania na jądrze.

postaci

$$\frac{\partial N(\mathbf{x}, \mathbf{y}; Y)}{\partial Y} = \bar{\alpha}_s \int \frac{d^2 \mathbf{z}}{2\pi} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{(\mathbf{x} - \mathbf{z})^2 (\mathbf{z} - \mathbf{y})^2} [N(\mathbf{x}, \mathbf{z}; Y) + N(\mathbf{z}, \mathbf{y}; Y) - N(\mathbf{x}, \mathbf{y}; Y) - N(\mathbf{x}, \mathbf{z}; Y) N(\mathbf{z}, \mathbf{y}; Y)] , \quad (26)$$

gdzie $\mathbf{r} \equiv \mathbf{x} - \mathbf{y}$, $\mathbf{b} \equiv (\mathbf{x} + \mathbf{y})/2$ oraz $\mathbf{r}' \equiv \mathbf{x} - \mathbf{z}$.

Dipolowy przekrój czynny $\hat{\sigma}(r, x)$ (ze wzoru (4)) otrzymuje się po wycałkowaniu amplitudy N po parametrze zderzenia

$$\hat{\sigma}(\mathbf{r}, x) = 2 \int d^2 \mathbf{b} N(\mathbf{r}, \mathbf{b}; Y = \ln 1/x) . \quad (27)$$

W uproszczonym przypadku, gdy profil w parametrze zderzenia jest funkcją $\Theta(R - \mathbf{b})$ (np. w modelu saturacji GBW) gdzie R jest rozmiarem hadronu, dipolowy przekrój czynny jest równy

$$\hat{\sigma}(\mathbf{r}, x) = 2\pi R^2 N(\mathbf{r}; Y = \ln 1/x) . \quad (28)$$

W szczególności parameter σ_0 z modelu saturacji GBW można interpretować jako normalizację $2\pi R^2$.

4.2 Rozwiązanie w 1+1 wymiarach

W pracy **III** zanalizowano szczegółowo rozwiązanie równania BK (25) w przybliżeniu nieskończenie dużego hadronu, $R \rightarrow \infty$. Wówczas w równaniu (25) skomplikowane sprzężenie między rozmiarem dipola \mathbf{r} a parametrem zderzenia \mathbf{b} może być zaniedbane

$$|\mathbf{r}| \ll |\mathbf{b}| < R , \quad (29)$$

i równanie staje się niezależne od \mathbf{b} : $N(\mathbf{r}, \mathbf{b}; Y) \rightarrow N(\mathbf{r}; Y)$. Zależność od parametru zderzenia \mathbf{b} wchodzi wówczas wyłącznie poprzez warunki brzegowe

$$N^{(0)}(r, b) \equiv N(r, b; Y = 0) .$$

Zakładamy również, że rozwiązanie jest cylindrycznie symetryczne $N(\mathbf{r}; Y) \equiv N(r = |\mathbf{r}|; Y)$. W tym uproszczonym przypadku 1+1 wymiarów (1 stopień swobody dla dipola + 1 wymiar związany z Y) równanie przyjmuje prostszą postać w przestrzeni pędów

$$\frac{\partial \phi(k, Y)}{\partial Y} = \bar{\alpha}_s (K \otimes \phi)(k, Y) - \bar{\alpha}_s \phi^2(k, Y) , \quad (30)$$

gdzie funkcja $\phi(k, Y)$ jest transformatą Fouriera amplitudy N

$$\phi(k, Y) = \int_0^\infty \frac{dr}{r} J_0(kr) N(r, Y) . \quad (31)$$

Część liniowa równania (30) to oczywiście równanie BFKL w przestrzeni pędów

$$\frac{d\phi(k, Y)}{dY} = (K \otimes \phi)(k, Y) ,$$

gdzie działanie jądra BFKL na funkcję ϕ jest zdefiniowane następująco

$$(K \otimes \phi)(k, Y) = \bar{\alpha}_s \int_0^\infty \frac{dk'^2}{k'^2} \left\{ \frac{k'^2 \phi(k', Y) - k^2 \phi(k, Y)}{|k^2 - k'^2|} + \frac{k^2 \phi(k, Y)}{\sqrt{4k'^4 + k^4}} \right\}. \quad (32)$$

Charakterystyczną własnością powyższego równania liniowego jest dyfuzja w przestrzeni pędów, patrz np. [17]. Można to łatwo zobaczyć analizując przybliżone rozwiązanie równania liniowego (32)

$$k\phi^{\text{lin}}(k, Y) = \frac{\exp(\bar{\alpha}_s \chi(0)Y)}{\sqrt{\pi \bar{\alpha}_s \chi''(0)Y}} \exp\left(-\frac{\ln^2(k^2/k_0^2)}{2\bar{\alpha}_s \chi''(0)Y}\right), \quad (33)$$

gdzie $\chi(0) = 4 \ln 2$ i $\chi''(0) = 28\zeta(3)$. Pierwszy człon z eksponentą jest odpowiedzialny za wzrost amplitudy z rapidity Y natomiast drugi człon z eksponentą to dyfuzja w pędach poprzecznych k .

Na rysunku 6 pokazane jest rozwiązanie $k\phi(k, Y)$ jako funkcja pędu k dla różnych wartości rapidity w przypadku równania liniowego i nieliniowego. Rozwiązania zostały otrzymane z tych samych warunków początkowych

$$k\phi(k, Y = 0) = \delta(\ln(k/k_0)), \quad (34)$$

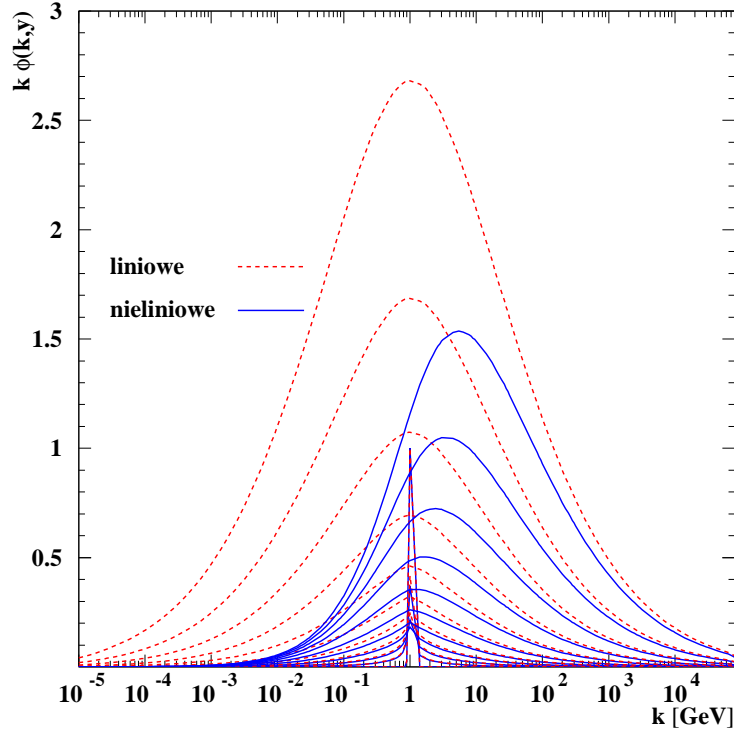
gdzie $k_0 = 1 \text{ GeV}$. Rozwiązanie równania liniowego ma w przybliżeniu postać gausowską z szerokością, która rośnie wraz z rapidity, jak można oczekiwać z równania (33). Jest to symetryczna dyfuzja do małych i dużych wartości pędów dookoła wartości $k = k_0$ zadanej w warunkach początkowych (34). Zauważalny jest również szybki wzrost z energią normalizacji funkcji $k\phi(k, Y)$. W przypadku rozwiązania równania BK widoczne jest tłumienie dyfuzji w obszarze małych wartości pędów k jak również przesuwanie się maksimum rozwiązania $k_{\text{max}}(Y)$ wraz z rosnącym Y . Dla pędów dużo większych niż $k_{\text{max}}(Y)$ nieliniowość przestaje odgrywać rolę i rozwiązanie równania BK dąży do rozwiązania równania liniowego. W pracy **III** zdefiniowano skalę saturacji z równania nieliniowego jako maksimum funkcji $k\phi(k, Y)$ i pokazano, że tak zdefiniowana skala saturacji rośnie eksponencjalnie z Y

$$Q_s(Y) \equiv k_{\text{max}}(Y) = Q_0 \exp(\lambda Y), \quad (35)$$

gdzie $\lambda \simeq 2\bar{\alpha}_s$. Pokazano również, że dla wartości pędów mniejszych od skali saturacji, rozwiązanie wykazuje własność skalowania geometrycznego i ma postać

$$\phi(k, Y) = \ln(Q_s(Y)/k), \quad k < Q_s(Y). \quad (36)$$

Skalowanie geometryczne w rozwiązaniu $\phi(k, Y)$ zostało zilustrowane na rysunku 7. Rozwiązanie $\phi(k, Y)$ zaprezentowano jako funkcję zmiennej skalującej $k/Q_s(Y)$. Różne linie odpowiadają różnym wartościom rapidity Y . Skalowanie oznacza, że linie te nakładają się w jedną dla obszaru $k < Q_s(Y)$. Dla obszaru $k > Q_s(Y)$ nie ma skalowania gdyż tam człon nieliniowy jest zaniedbywalny i w praktyce obowiązuje tam ewolucja liniowa. Z równania (36) wynika też, że zależność od rapidity w obszarze skalowania jest liniowa, lub odpowiednio, że zależność od x Bjorkena jest logarytmiczna $\phi \sim Y = \ln(1/x)$. Jest to zasadnicza różnica w porównaniu z rozwiązaniem

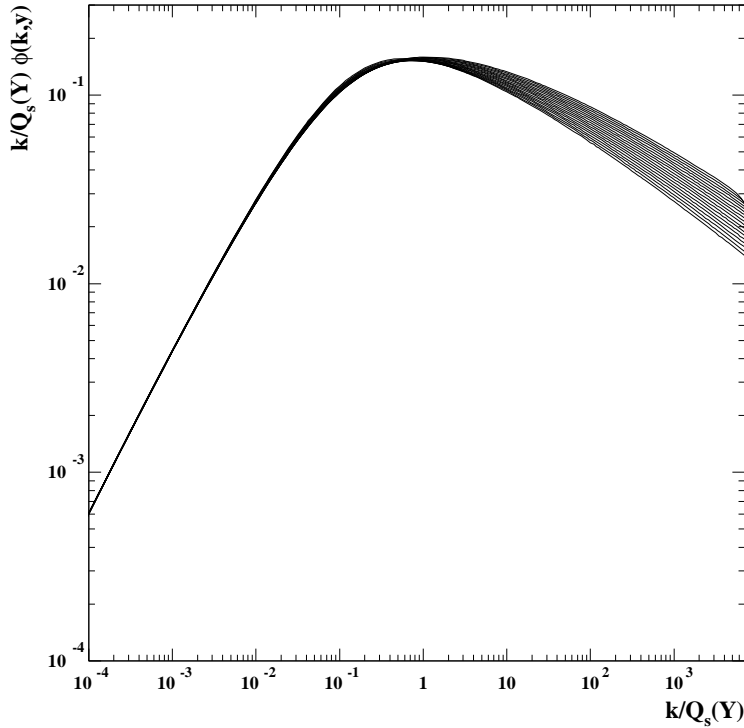


Rysunek 6: Rozwiązania $k\phi(k, Y)$ równań liniowego BFKL (32) i nieliniowego BK (30) dla różnych wartości rapidity $Y = \ln(1/x) = (1, \dots, 10)$. Stała sprzężenia ustalona $\bar{\alpha}_s = 0.2$.

liniowego równania BFKL, którego zależność od rapidity jest eksponencjalna (a co za tym idzie zależność od x Bjorkena jest potęgowa) co widać z rozwiązania (33).

Rozwiązanie $N(r, Y)$ w przestrzeni konfiguracyjnej ma bardzo podobne jakościowo własności do modelu saturacji GBW, patrz rysunek (2). Rozwiązanie to saturuje się do 1 dla dużych rozmiarów dipoli, co odpowiada logarytmowi w przestrzeni pędów dla $k < Q_s(Y)$: $N(r, Y) \rightarrow 1$ odpowiada $\phi(k, Y) \rightarrow \ln Q_s(Y)/k$. Dla wyższych wartości rapidity, obszar saturacji amplitudy $N(r, Y)$ przesuwa się do coraz mniejszych rozmiarów dipoli.

Interesujące wnioski wynikają także z analizy nieliniowego równania (25) z biegnącą stałą sprzężenia. Równanie BK zostało wprowadzone wyprowadzone dla ustalonej stałej sprzężenia w wiodącym przybliżeniu ze względu na człony $(\alpha_s \ln 1/x)^n$, jednak biegnąca stała sprzężenia jest istotnym efektem niewiodącym (patrz np. [3]) i ma kapitalne znaczenie przy fenomenologii. Biegnąca stała sprzężenia wiąże się jednak z problemem regularyzacji i zależności od nieperturbacyjnych parametrów. Z wielu analiz równania liniowego, patrz np. [18], wynika że jego rozwiązanie jest bardzo czułe na sposób regularyzacji stałej sprzężenia. Dla przykładu, wartość interceptu, który rządzi zależnością od x , jest zależna od parametru regularyzacji stałej sprzężenia. To oczywiście powoduje, że przewidywania oparte na rozwiązaniu liniowego równania BFKL w dużej mierze zależą od bardzo słabo znanych nieperturbacyjnych parametrów. W przypadku równania



Rysunek 7: Przeskalowane rozwiązanie $k/Q_s(Y)\phi(k, Y)$ nieliniowego równania Balitskiego-Kovchegova (30) dla różnych wartości rapidity $Y = \ln(1/x) = (1, \dots, 10)$ w funkcji zmiennej skalującej $k/Q_s(Y)$. Stała sprzężenia ustalona $\bar{\alpha}_s = 0.2$.

nieliniowego ten problem znika, gdyż dla małych wartości k dyfuzja jest tłumiona przez człon nieliniowy. Jediną charakterystyczną skalą jest skala saturacji, która rosnąc z energią powoduje, że rozwiązanie przechodzi do perturbacyjnego obszaru pędów. Numeryczna analiza pokazuje, że rozwiązanie $\phi(k, Y)$ jest praktycznie niezależne od sposobu regularyzacji biegnącej stałej sprzężenia.

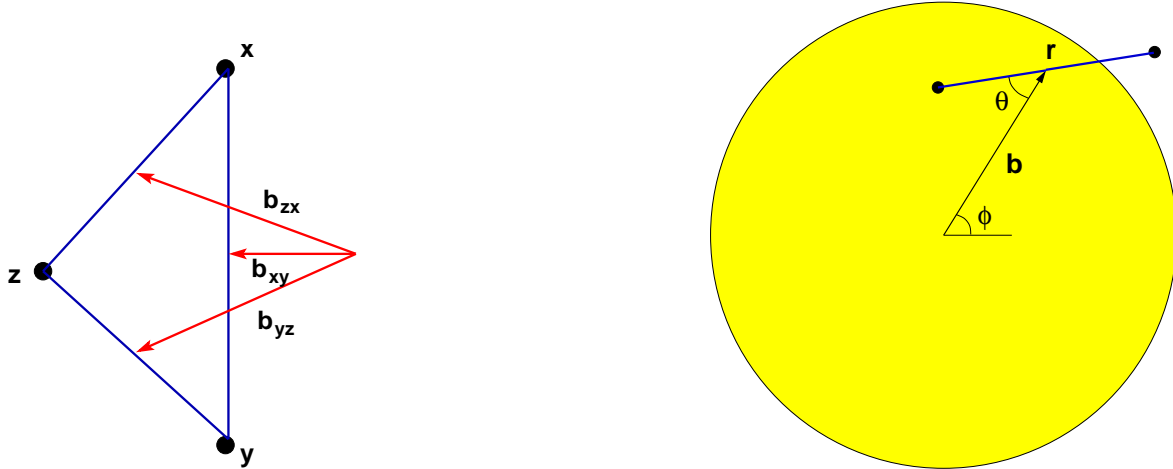
W pracy **III** wyliczono również skalę saturacji z równania nieliniowego z biegnącą stałą sprzężenia. Okazuje się, że zamiast zależności eksponencjalnej od rapidity (35) skala saturacji ma postać

$$Q_s(Y) = \Lambda \exp \left[\sqrt{\frac{24}{b_0}}(Y - Y_0) + L_0^2 \right], \quad Y > Y_0, \quad (37)$$

gdzie $L_0 = \ln(Q_0/\Lambda)$. Wynika z tego, że lokalna eksponenta $\lambda(Y) = \frac{1}{Q_s(Y)} \frac{dQ_s(Y)}{dY}$ maleje z rapidity jak $1/\sqrt{Y}$ dla bardzo dużych Y . Taka zależność została potwierdzona w numerycznej analizie rozwiązania przeprowadzonej w pracy **III**. Pokazano też, że rozwiązanie $\phi(k, Y)$ równania BK z biegnącą stałą sprzężenia wykazuje własność skalowania $\phi(k, Y) = \phi(k/Q_s(Y))$ dla $k < Q_s(Y)$ ze skalą saturacji daną wzorem (37).

4.3 Rozwiązanie w 3+1 wymiarach

Przypomnijmy, że rozwiązanie analizowane w poprzednim rozdziale zostało otrzymane przy założeniu, że rozmiary tarczy hadronowej, na której rozprasa się dipol są bardzo duże w porównaniu z rozmiarami dipola \rightarrow przybliżenie nieskończenie dużego hadronu (patrz warunek (29)). Wówczas jedyną zależność od parametru zderzenia mogła być wprowadzona poprzez warunki początkowe $N^0(\mathbf{r}, \mathbf{b}; Y = 0)$. Jednakże pełne równanie BK (25) lub (26) generuje zależność od parametru zderzenia. Można się o tym przekonać analizując prawą stronę równania BK w postaci (26): poszczególne amplitudy N zależą od trzech dipoli tworzących trójkąt pokazany na rysunku 8. Jądro równania zależy tylko od rozmiarów tych dipoli, czyli boków trójkąta $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$. Zależność od parametru zderzenia wchodzi poprzez argumenty amplitud N , czyli wektorów $\mathbf{b}_{xy}, \mathbf{b}_{xz}, \mathbf{b}_{zy}$.



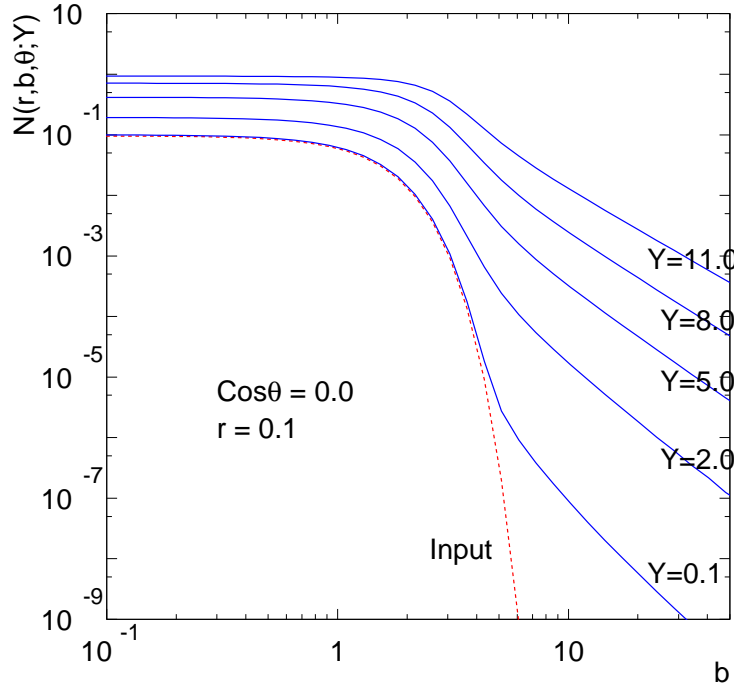
Rysunek 8: Na lewo: Geometria równania BK: trzy dipole $(\mathbf{x}, \mathbf{y}), (\mathbf{z}, \mathbf{y}), (\mathbf{x}, \mathbf{z})$ tworzą trójkąt w przestrzeni parametru zderzenia. Wektory $\mathbf{b}_{xy}, \mathbf{b}_{xz}, \mathbf{b}_{zy}$ to parametry zderzenia poszczególnych dipoli. Na prawo: Dipol o rozmiarze \mathbf{r} rozpraszany na hadronie, \mathbf{b} jest parametrem zderzenia tego dipola.

W pracy **IV** po raz pierwszy rozwiązano i zanalizowano równanie BK z pełną zależnością od parametru zderzenia. Ze względu na dużą liczbę stopni swobody ($4 + 1$ w porównaniu do $1 + 1$ poprzednio), jest to problem znacznie trudniejszy technicznie niż rozwiązanie zaprezentowane w pracy **III** i opisane w poprzednim rozdziale.

Aby nieco uprościć obliczenia przyjęto, że amplituda $N(\mathbf{r}, \mathbf{b})$ jest niezmiennicza względem globalnego obrotu dipola wokół środka układu współrzędnych. Na rysunku 8 (prawy rysunek) pokazano układ dipola $q\bar{q}$ względem hadronu i jego stopnie swobody

$$(\mathbf{r}, \mathbf{b}) = (r, b, \theta, \phi), \quad (38)$$

gdzie $\cos \theta = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{b}}{rb}$ jest orientacją dipola względem osi parametru zderzenia. Niezmienniczość względem globalnego obrotu oznacza, że amplituda jest niezależna od kąta ϕ , patrz prawy rysunek 8. Jest to naturalne założenie, które wynika z faktu, że hadron na którym następuje rozproszenie jest cylindrycznie symetryczny. Powoduje to zmniejszenie liczby wymiarów z $4 + 1$ do $3 + 1$. Bardzo istotnym elementem w analizie równania



Rysunek 9: Profil w parametrze zderzenia b otrzymany z rozwiązania nieliniowego równania ewolucji BK dla różnych wartości rapidity Y . Orientacja dipola $\cos\theta = 0$ i jego rozmiar $r = 0.1$ są ustalone. Czerwona linia przerywana to warunki początkowe zadane rozkładem Glauber-Mueller (39).

jest wybór warunków brzegowych. Ze względu na trudności techniczne związane z bardzo długim czasem obliczeń zanalizowano to równanie dla jednej klasy warunków brzegowych. Założono, że początkowy rozkład jest typu Glauber - Mueller [19, 20]

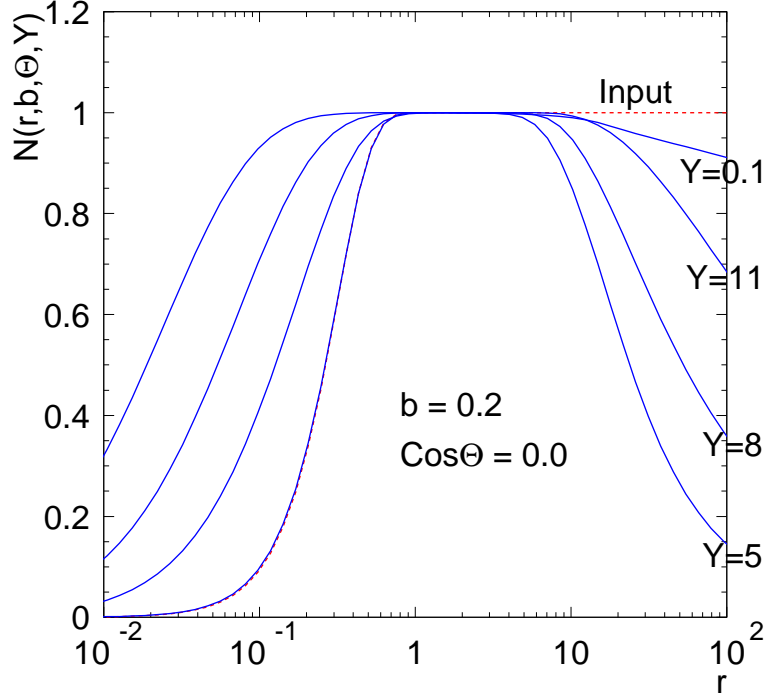
$$N^0(r, b) = 1 - \exp\{-r^2 S(b)\}, \quad S(b) = S_0 \exp(-b^2/B_0^2) \quad (39)$$

gdzie S_0 oraz B_0 są dowolnymi stałymi.

Na rysunku 9 pokazano rozwiązanie równania BK startując z warunków początkowych (39) w funkcji parametru zderzenia b , dla ustalonego małego rozmiaru dipola $r = 0.1$ i ustalonej orientacji dipola $\cos(\theta) = 0$. Poszczególne krzywe od najmniejszej do największej odpowiadają różnym wartościom rapidity $Y = 0.1, 2.0, 5.0, 8.0, 11$. Charakterystyczną cechą tego rozwiązania jest fakt, że po infitezymalnym kroku w rapidity, $\Delta Y = 0.1$, generowana jest zależność potęgowa w b mimo, że warunki początkowe mają gaussowski profil $S(b)$. Dla dużych wartości parametru b amplituda zachowuje się jak $N(b) \sim 1/b^\gamma$ gdzie $\gamma \simeq 3.9$. To zachowanie odzwierciedla formę jądra równania BK, które jest potęgowe w rozmiarach dipoli. Z analizy tego równania przeprowadzonej w [21] oraz w pracy **IV** wynika, że zależność potęgowa typu $\sim 1/b^4$ pochodzi od całkowania po bardzo dużych rozmiarach dipoli w całości po prawej stronie równania (25).

Na rysunku 9 widoczny jest także silny wzrost amplitudy wraz z energią dla usta-

lonych, dużych wartości b . Zależność od energii jest eksponencjalna i przykładowo dla $b = 10$, amplituda $N \sim \exp(\omega Y)$, gdzie $\omega \simeq 2.7\bar{\alpha}_s$. Ta silna zależność jest oczywiście generowana przez część liniową równania BK (część nieliniowa jest zanedbywalna dla małych wartości amplitudy N) odpowiadającą równaniu BFKL i jest zgodna z wartością eksponenty Lipatova [22] $\omega_P = 4 \ln 2\bar{\alpha}_s = 2.77\bar{\alpha}_s$. Z kolei dla małych wartości parametru zderzenia, $b \leq 5$ obserwujemy, że wzrost z energią jest silnie tłumiony poprzez obecność członu nieliniowego. To jest obszar, w którym następuje saturacja partonowa.



Rysunek 10: Amplituda $N(r, b, \theta, Y)$ z rozwiązania równania BK jako funkcja rozmiaru dipola r dla ustalonego parametru zderzenia $b = 0.2$. Dipol ustawiony prostopadłe do parametru zderzenia $\cos \theta = 0.0$.

Na rysunku 10 pokazano rozwiązanie N przy ustalonym parametrze zderzenia w funkcji rozmiaru dipola. Dla bardzo małych dipoli amplituda jest również niewielka i wykazuje silny wzrost z rapidity Y . Dla ustalonego rapidity wraz ze zwiększającym się rozmiarem dipola amplituda osiąga saturację, czyli $N \rightarrow 1$. Przy dalszym zwiększaniu się rozmiarów dipola obserwujemy spadek amplitudy mimo iż rozkład początkowy (linia przerywana) (39) jest równy 1 w tym obszarze. Jest to zachowanie odmienne od uproszczonego rozwiązania w $1 + 1$ wymiarach jak również modelu saturacji GBW, porównaj rysunek 2. Tam amplituda była równa 1 dla rozmiarów r takich, że $r > 1/Q_s(Y)$. Spadek amplitudy dla dużych rozmiarów dipoli w tym przypadku jest związany z istnieniem skali w parametrze zderzenia wprowadzonej poprzez warunki początkowe. Fizycznie oznacza to, że końce bardzo dużych dipoli znajdują się w obszarze, w którym pole kolorowe jest bardzo słabe i wobec tego amplituda rozpraszania

jest również bardzo mała. W poprzednim przypadku $1 + 1$ wymiarów, przyjęliśmy założenie, że hadron na którym następuje rozproszenie był bardzo duży (w praktyce miał nieskończone rozmiary) a zatem amplituda była duża dla dowolnie dużych dipoli.

Z rysunku 10 widać również, że obszar w r , w którym następuje saturacja partonowa zwiększa się wraz z rosnącą wartością rapidity, co oznacza tyle, że charakterystyczna skala saturacji jak również rozmiary obszaru interakcji rosną wraz z energią.

Potęgową zależność amplitudy rozpraszania od parametru zderzenia b ma istotne konsekwencje jeśli chodzi o zachowanie się dipolowego przekroju czynnego w funkcji rapidity (energii). Jak pokazano analitycznie w pracy [21], taka zależność od parametru zderzenia prowadzi do potęgowego wzrostu z energią dipolowego przekroju czynnego a co za tym idzie łamania ograniczenia Froissarta-Martina

$$\hat{\sigma}(\mathbf{r}, x) = 2 \int d^2\mathbf{b} N(\mathbf{r}, \mathbf{b}; Y = \ln 1/x) \sim x^{-\lambda}.$$

Jest to związane z bardzo szybkim rozszerzaniem się obszaru interakcji w parametrze zderzenia. A zatem człon nieliniowy w równaniu BK, mimo iż prowadzi do lokalnej saturacji amplitudy $N \leq 1 \forall r, b, Y$, nie gwarantuje spełnienia ograniczenia Froissarta-Martina $\sigma(r, x)$. Problem tkwi w samej postaci jądra równania BK, w którym całkowanie następuje po dowolnych rozmiarach dipoli. W praktyce duże dipole powinny być ograniczone przez nieperturbacyjne zjawisko uwięzienia. Można to fenomenologicznie zrealizować poprzez wprowadzenie skali $\sim m_\pi$, która zmieni zachowanie potęgowe jądra BK na eksponencjalne dla dużych rozmiarów dipoli.

Warto również wspomnieć, że większość własności rozwiązania przedstawionego w tym rozdziale (zależność w parametrze zderzenia, spадanie amplitudy dla dużych r) jest związana z symetrią konforemną, która jest obecna w tym równaniu, patrz np. [22].

5 Obserwacje poprawek unitarnych w rozpraszaniu głębokonieelastycznym

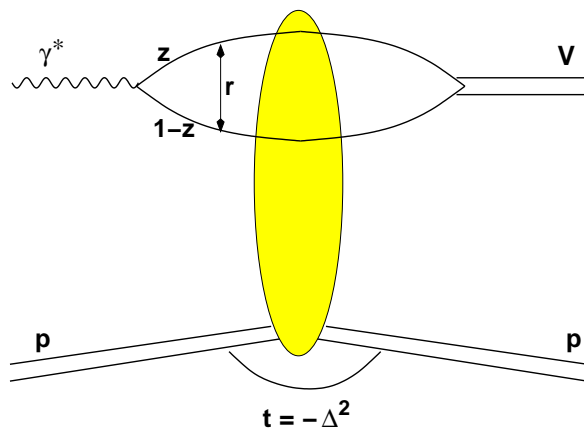
Bezpośrednia obserwacja efektów poprawek unitarnych czy partonowej saturacji w procesach zderzeń głębokonieelastycznych jak też hadronowych jest bardzo trudna. Obecnie dostępnych jest wiele modeli fenomenologicznych, które zawierają efekty unitarne [9, 23] i opisują dane, jak na przykład model saturacji GBW. W pracy **V** zaproponowano nową metodę oszacowania amplitudy rozpraszania w parametrze zderzenia bezpośrednio z danych eksperymentalnych, bez potrzeby użycia modeli fenomenologicznych. Wykorzystano w tym celu pomiary doświadczalne z akceleratora HERA procesu dyfrakcyjnej elastycznej produkcji mezonów wektorowych w zderzeniu głębokonieelastycznym elektron-proton. Pokazano, że profil elementarnej amplitudy rozpraszania dipol-proton w parametrze zderzenia b można otrzymać poprzez transformatę Fouriera przekroju czynnego zależnego od transferu pędu t .

5.1 Dyfrakcyjna elastyczna produkcja mezonów wektorowych

Proces elastycznej, dyfrakcyjnej produkcji mezonu wektorowego w obrazie dipolowym w zderzeniu γ^*p został pokazany na rysunku 11 (porównaj rysunek 1). W granicy wysokich energii proces ten można interpretować jako następującą sekwencję: produkcja pary kwark-antykwar (dipola), oddziaływanie tego dipola z protonem, utworzenie mezonu wektorowego. Przekaz pędu został oznaczony jako $t = -\Delta^2$. Amplituda $A_{el}(x, \Delta, Q)$ na ten proces wyraża się w następujący sposób

$$\mathcal{A}_{el}(x, \Delta, Q) = \sum_{h, \bar{h}} \int d^2\mathbf{r} dz \Psi_{h, \bar{h}}^{\gamma^*}(z, \mathbf{r}; Q) A_{el}^{q\bar{q}-p}(x, \mathbf{r}, \Delta) \Psi_{h, \bar{h}}^V(z, \mathbf{r}), \quad (40)$$

gdzie $A_{el}^{q\bar{q}-p}(x, \mathbf{r}, \Delta)$ jest elementarną amplitudą dla rozproszenia dipola kwarkowego o rozmiarze \mathbf{r} na protonie, przy przekazie pędu Δ , $\Psi_{h, \bar{h}}^{\gamma^*}(z, \mathbf{r}; Q)$ jest funkcją falową wirtualnego fotonu (porównaj równanie (4)), natomiast $\Psi_{h, \bar{h}}^V(z, \mathbf{r})$ jest funkcją falową mezonu wektorowego. $h\bar{h}$ to helicity odpowiednio kwarku i antykwarku.



Rysunek 11: Diagram przedstawiający dyfrakcyjną elastyczną produkcję mezonu wektorowego w obrazie dipolowym w zderzeniu γ^*p . $\gamma^*(q)$ wirtualny foton o czteropędzie q , $V(q + \Delta)$ mezon wektorowy o czteropędzie $q + \Delta$. Proton jest rozproszony elastycznie.

Różniczkowy przekrój czynny otrzymuje się z amplitudy (40) poprzez następujący związek

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{16\pi} |\mathcal{A}_{el}(x, \Delta, Q)|^2. \quad (41)$$

Elementarna amplituda $A_{el}^{q\bar{q}-p}(x, \mathbf{r}, \Delta)$ jest związana z elementem macierzy rozpraszania S poprzez transformatę Fouriera

$$A_{el}^{q\bar{q}-p}(x, \mathbf{r}, \Delta) = 2 \int d^2\mathbf{b} [1 - S(x, \mathbf{r}, \mathbf{b})] e^{i\mathbf{b}\Delta}. \quad (42)$$

Wykorzystując twierdzenie optyczne (i zakładając, że $\mathcal{R}eS = S$) można pokazać, że element $S(x, \mathbf{r}, \mathbf{b})$ jest związany z amplitudą N z równania Balitskiego-Kovchegova (25)

$$1 - \mathcal{R}eS(x, \mathbf{r}, \mathbf{b}) = N(x, \mathbf{r}, \mathbf{b}). \quad (43)$$

Granica czarnego dysku (całkowitej saturacji) odpowiada $S = 0$ czyli $N = 1$.

5.2 Element macierzy S w funkcji parametru zderzenia

Z powyższych rozważań wynika zatem, iż mając dane rozwiązanie równania BK z zależnością od parametru zderzenia można wyliczyć przekrój czynny (41) dla procesu przedstawionego na rysunku 11. W pracy **V** nie rozwiązywano jednak równania BK, przyjęto natomiast odwrotną strategię: korzystając z danych eksperymentalnych, wyliczono jaka jest postać macierzy S jako funkcja parametru zderzenia b . W tym celu wyrażono element macierz S korzystając z równań (40,41,42) i wykonując odwrotną transformatę Fouriera

$$\int \frac{d^2\Delta}{(2\pi)^2} \sqrt{\frac{d\sigma}{dt}} e^{-i\Delta\mathbf{b}} = \frac{1}{\sqrt{16\pi}} \sum_{h,\bar{h}} \int d^2\mathbf{r} dz \Psi_{h,\bar{h}*}^{\gamma*}(z, \mathbf{r}, Q) 2[1 - S(x, \mathbf{r}, \mathbf{b})] \Psi_{h,\bar{h}}^V(z, \mathbf{r}) . \quad (44)$$

Powyższą relację można zapisać w bardziej zwarty sposób jako

$$\int \frac{d^2\Delta}{(2\pi)^2} \sqrt{\frac{d\sigma}{dt}} e^{-i\Delta\mathbf{b}} = \frac{1}{\sqrt{16\pi}} \langle \Psi^{\gamma*} | 2[1 - S(x, \mathbf{r}, \mathbf{b})] | \Psi^V \rangle , \quad (45)$$

lub

$$\frac{\langle \Psi^{\gamma*} | S(x, \mathbf{r}, \mathbf{b}) | \Psi^V \rangle}{\langle \Psi^{\gamma*} | \Psi^V \rangle} = 1 - \frac{1}{2\langle \Psi^{\gamma*} | \Psi^V \rangle \pi^{3/2}} \int d^2\Delta \sqrt{\frac{d\sigma}{dt}} e^{-i\Delta\mathbf{b}} . \quad (46)$$

Formuła (46) pozwala wyliczyć średni element macierzy S ważony funkcjami falowymi fotonu i mezonu poprzez różniczkowy przekrój czynny $d\sigma/dt$. Zależność przekroju czynnego od transferu pędu Δ tłumaczy się, poprzez transformatę Fouriera, na zależność od parametru zderzenia \mathbf{b} dla macierzy S i amplitudy dipol-proton.

Należy podkreślić, że z równania (46) można wyliczyć jedynie średnią wartość elementu macierzy S . Jednakże, jak pokazano w pracy **V**, rozkład

$$\sum_{h,\bar{h}} 2\pi r^2 \int_0^1 dz \Psi_{\gamma*}^{h,\bar{h}*}(z, r; Q) \Psi_V^{h,\bar{h}}(z, r) , \quad (47)$$

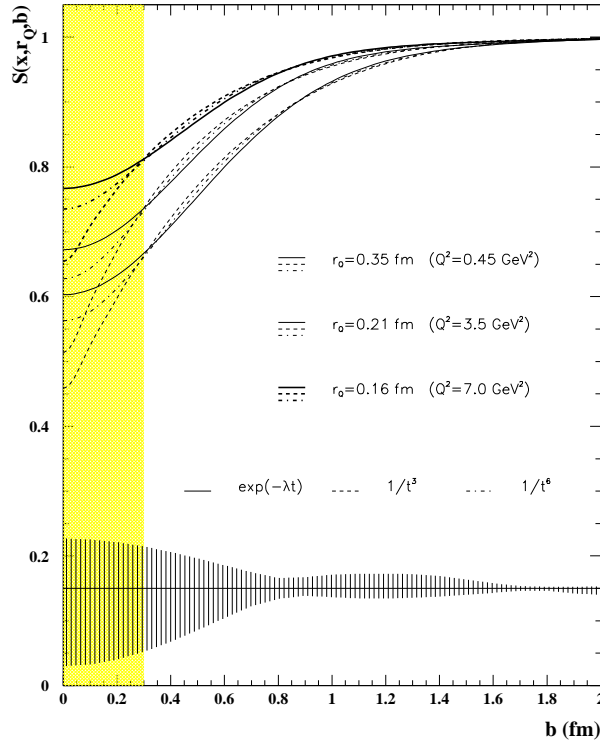
ma wyraźne maksimum dla określonych rozmiarów dipola, zależny od wirtualności fotonu Q^2 . To umożliwia wykonanie następującego przybliżenia⁵

$$\frac{\langle \Psi^{\gamma*} | S(x, \mathbf{r}, \mathbf{b}) | \Psi^V \rangle}{\langle \Psi^{\gamma*} | \Psi^V \rangle} \simeq S(x, r_Q, b) \quad \text{gdzie} \quad r_Q \simeq \frac{A}{\sqrt{Q^2 + m_V^2}} , \quad A \simeq 2 . \quad (48)$$

A zatem średnia wartość elementu macierzy S może być zastąpiona przez wartość tego elementu dla pewnego charakterystycznego rozmiaru r_Q .

Jedynym źródłem teoretycznej niepewności w oszacowaniu (46) jest postać funkcji falowej mezonu wektorowego. W pracy **V** szczegółowo zanalizowano możliwy błąd pochodzący od zależności od modelu, korzystając z dostępnych parametryzacji funkcji falowych mezonów, patrz np. [24, 25, 26]. Okazuje się, że normalizacja $\langle \Psi^{\gamma*} | \Psi^V \rangle$

⁵Interesują nas tylko wielkości uśrednione po kątach, a zatem w naszych rozważaniach S jest zależne tylko od $r = |\mathbf{r}|$ i $b = |\mathbf{b}|$



Rysunek 12: Element macierzy S dla zderzenia dipol-proton jako funkcja parametru zderzenia b . Obliczenia przeprowadzono dla trzech różnych wartości Q^2 , które odpowiadają trzem różnym rozmiarom dipola (które są oszacowane na podstawie wzoru $r_Q = \exp(\langle \log r \rangle)$). Dla każdej wartości Q^2 są pokazane trzy krzywe odpowiadające trzem różnym ekstrapolacjom danych dla $d\sigma/dt$ do obszaru dużych $t > 0.6 \text{ GeV}^2$. Zaciemniony obszar poniżej $b < 0.3 \text{ GeV}$ to obszar gdzie założenie o rodzaju ekstrapolacji jest kluczowe i gdzie powyższe przewidywania nie są już precyzyjne. Kreskowany obszar u dołu jest oszacowaniem błędów związanych z doświadczalnymi niepewnościami dla przekroju czynnego $d\sigma/dt$ dla $t < 0.6 \text{ GeV}^2$.

zmienia się niewiele, o około 10 – 20% w zależności od wyboru modelu dla funkcji falowej Ψ^V . Średnia wartość r_Q jest bardziej zależna od modelu dla Ψ^V i może się zmieniać o około 30%. Kolejnym źródłem niepewności w oszacowywaniu elementu macierzy S z równania (46) są eksperymentalne błędy dla przekroju czynnego $d\sigma/dt$ oraz skończony zakres pomiarów w funkcji transferu pędu $t < t_{\max} = 0.5 \text{ GeV}^2$.

Na rysunku 12 przedstawiono profil elementu macierzy S otrzymany z równania (46) przy wykorzystaniu danych na produkcję mezonów wektorowych z akceleratora HERA przy małych wartościach $x \simeq 10^{-4}$. Trzy zestawy krzywych odpowiadają kolejno różnym wartościom $Q^2 = 0.45, 3.5, 7.0 \text{ GeV}^2$. Im mniejsza wartość Q^2 , tym większy rozmiar r_Q i element macierzy S jest mniejszy. Odpowiada to większemu prawdopodobieństwu zajęcia rozpraszania dla dużych dipoli. Z rysunku 12 widać również że wyniki dla parametrów zderzenia $b > 0.3 \text{ fm}$ nie są zbyt czułe na rodzaj ekstrapolacji dla $d\sigma/dt$ do dużych t . Jak dyskutowano wcześniej granica $S = 0$ odpowiadałaby granicy unitarności (czarnego dysku). Z przedstawionej analizy w pracy **V** wynika,

że granica ta nie została jeszcze osiągnięta na akceleratorze HERA. Jednak prawdopodobieństwo, $\langle 1 - S^2 \rangle \geq 1 - \langle S \rangle^2$, że dipol kwarkowy przechodzący przez proton ulegnie nieelastycznemu rozproszeniu jest znacznie większe niż 1/2, co oznacza, że poprawki saturacyjne mogą być już istotne w obszarze kinematycznym akceleratora HERA.

Mając daną wartość macierzy S jako funkcję parametru zderzenia można wyliczyć skalę saturacji zakładając następującą fenomenologiczną postać, motywowaną modelem saturacji GBW,

$$S(x, r_Q, b) = \exp(-r_Q^2 Q_s^2(x, b)/4). \quad (49)$$

Z powyższego wzoru i wartości macierzy S pokazanej na rysunku 12 otrzymuje się, że skala saturacji ma wartość około $1 - 1.5 \text{ GeV}^2$ dla $b = 0.3 \text{ fm}$ oraz 0.2 GeV^2 dla $b = 1.0 \text{ fm}$. Wartość dla małych parametrów zderzenia jest zgodna z wartością średniej skali saturacji przyjętej w modelu GBW.

6 Zastosowanie modelu saturacji: produkcja neutronów w atmosferze przy wysokich energiach

Partonowa saturacja opisana dotychczas, której poświęcono prace **I-V**, była rozpatrywana w zderzeniach głębokonieelastycznych $\gamma^* - p$. Oczywiście może ona zachodzić również w innych procesach, na przykład w zderzeniach hadronów. W pracach **VI-VII** zanalizowano w kontekście saturacji proces produkcji neutronów w atmosferze. Neutrony te pochodzą z rozpadów cząstek powstałych w zderzeniach protonów pochodzących z promieniowania kosmicznego z jądrami atomów atmosfery. Protony promieniowania kosmicznego mogą mieć bardzo wysokie energie, nawet rzędu $E \simeq 10^{12} \text{ GeV}$, patrz np. [27]. W wyniku ich zderzeń z jądrami atmosfery powstają mezony π oraz K , które następnie rozpadają się w wyniku oddziaływań słabych produkując w stanie końcowym neutrony, [28].

Przy bardzo wysokich energiach mezony ulegają rozproszeniu na jądrami atomów w atmosferze ziemskiej i tracą część energii, co powoduje, że spektrum neutronów szybko zanika powyżej $E_\nu \simeq 100 \text{ TeV}$. Przy wyższych energiach dominują neutrony powstałe w wyniku rozpadu cięższych hadronów: $D^0, D^\pm, D_s, \Lambda_c, B^\pm, B^0, B_s, \Lambda_b$. Ze względu na krótki czas życia hadrony te rozpadają się zanim zdążą ulec oddziaływaniu z materią, przez co nie tracą energii. Neutrony powstałe z tych ciężkich hadronów nazywane są również “szybkimi neutronami” (*prompt neutrinom*), patrz np. [29].

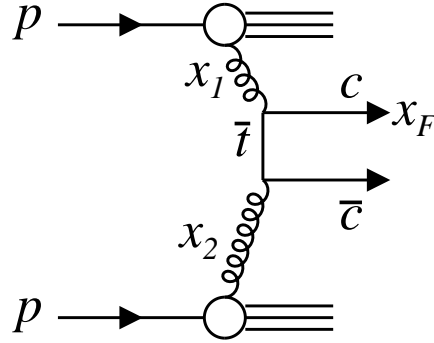
6.1 Przekroje czynne na produkcję ciężkich kwarków w zderzeniach pp i pA

Aby oszacować wielkość strumienia szybkich neutronów produkowanych w atmosferze przez rozpad ciężkich hadronów, potrzebna jest dokładna znajomość przekrojów czynnych na produkcję tych hadronów w zderzeniach proton-proton oraz proton-jądro.

Podstawowy diagram⁶ (w wiodącym rzędzie) został pokazany na rysunku 13, gdzie $x_F \simeq E_c/E$ w granicy wysokich energii (E_c jest energią kwarku c a E jest energią protonu z promieniowania kosmicznego). Przekrój czynny na ten proces można zapisać w następującej faktoryzowalnej postaci

$$\frac{d\sigma}{dx_F}(pp \rightarrow c + \dots) = \int dx_1 dx_2 dz g(x_1, \mu_F^2) \frac{d\bar{\sigma}_{gg \rightarrow c\bar{c}}}{dz} g(x_2, \mu_F^2) \delta(zx_1 - x_F), \quad (50)$$

gdzie $\frac{d\bar{\sigma}_{gg \rightarrow c\bar{c}}}{dz}$ jest przekrojem czynnym na elementarny proces $gg \rightarrow c\bar{c}$ natomiast $g(x_1, \mu_F^2)$ oraz $g(x_2, \mu_F^2)$ to rozkłady gęstości gluonów. Przy wysokich energiach, potrzebna jest dobra znajomość rozkładu gluonów przy bardzo małych wartościach x Bjorkena gdyż $x_2 \simeq M_{c\bar{c}}^2/2x_F s \sim 10^{-9} - 10^{-4}$ gdzie \sqrt{s} jest całkowitą energią w środku masy.



Rysunek 13: Diagram przedstawiający produkcję ciężkiej pary kwark-antykwar w zderzeniu proton-proton.

Tak małe wartości x Bjorkena nie są dostępne na obecnie pracujących akceleratorach, na przykład akcelerator HERA mierzy rozkłady gluonów do granicy $x \simeq 10^{-4} - 10^{-5}$. Przy tak wysokich energiach (czyli małych wartościach x) efekty saturacyjne w rozkładzie gluonów $g(x_2)$ mogą dawać istotne poprawki. W pracach **VI-VII** porównano przewidywania dla przekroju czynnego (50) biorąc pod uwagę trzy możliwe ekstrapolacje rozkładu gluonów:

- standardowa ewolucja DGLAP
- zunifikowane równania BFKL/DGLAP, z ekstrapolacją typu $x^{-\lambda}$
- ekstrapolacja z modelem saturacji GBW

Ekstrapolacja poprzez standardową ewolucję DGLAP polega na użyciu przybliżenia wiodących podwójnych logarytmów poniżej $x < 10^{-5}$. Zunifikowane równania ewolucji [30] zawierają wysumowane człony typu $(\alpha_s \ln 1/x)^n$ poprzez zawarty w nich formalizm BFKL. Rozkłady partonów otrzymane z tych równań zostały dopasowane do danych z akceleratora HERA.

⁶Oczywiście jest też drugi diagram w tym samym rzędzie zawierający sprzężenie trójgluonowe.

W trzecim scenariuszu rozważanym w pracach **VI-VII** przekrój czynny został wyliczony przy użyciu (zmodyfikowanego) modelu saturacji GBW. Zaletą tego modelu jest to, że może być on łatwo uogólniony do procesu rozpraszania na jądrach, uwzględniając wielokrotne oddziaływanie pary $q\bar{q}$ na jądrze poprzez formalizm eikonalny

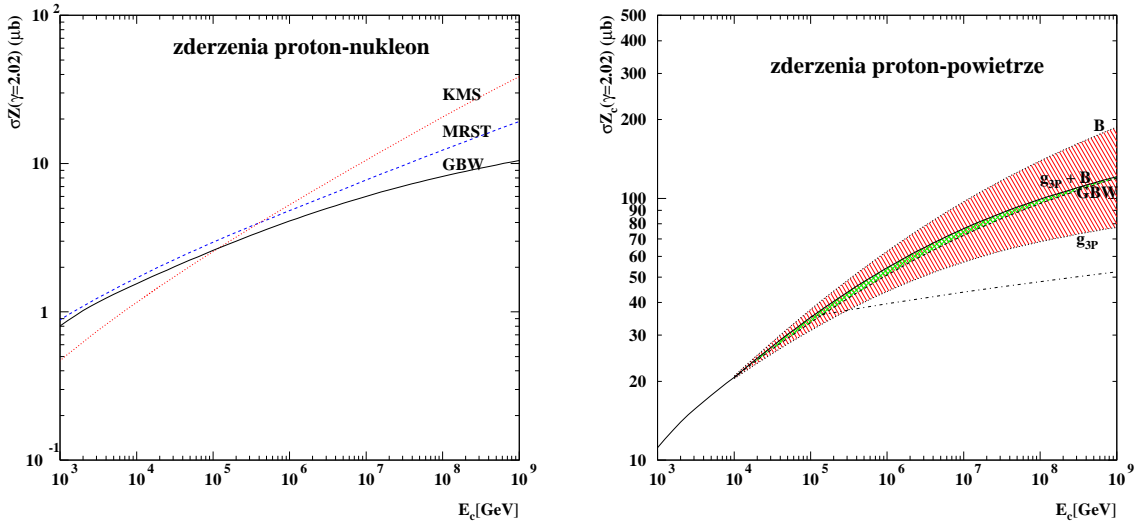
$$A\hat{\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-(A-1)\hat{\sigma}/8\pi B_A)^{n-1}}{n n!}, \quad (51)$$

gdzie A jest średnią liczbą masową dla powietrza $A = 14.5$ natomiast parameter $B_A = 29 \text{ GeV}^{-2}$. A zatem oddziaływanie proton-jądro to złożenie oddziaływań proton-nukleon poprzez formułę (51). Uwzględnienie rozpraszania wielokrotnego na jądrach powoduje wzmocnienie absorpcji pary kwark-antykwar i zmniejszenie wartości przekroju czynnego.

Rezultaty obliczeń przekroju czynnego w trzech scenariuszach zostały zilustrowane na rysunku 14, gdzie przedstawiony został tak zwany Z - moment będący splotem przekroju czynnego $d\sigma^c/dx$ ze strumieniem promieni kosmicznych, którego zależność od energii jest $E^{-(\gamma+1)}$, gdzie $\gamma = 2.02$

$$\sigma Z_c \equiv \int \frac{d\sigma^c}{dx} x^{2.02} dx. \quad (52)$$

Lewy rysunek 14 dotyczy zderzeń proton-nukleon. Widać wyraźne różnice w trzech



Rysunek 14: Lewy rysunek: zależność momentu Z (52) od energii kwarku powabnego dla trzech różnych modeli gluonów: KMS, MRST, GBW. Prawy rysunek: zależność momentu Z w zderzeniach proton-jądro od energii kwarku powabnego dla uogólnionego modelu GBW zawierającego saturację partonową i cieniowanie jądrowe (51).

modelach przy wysokich energiach E_c . Model KMS oparty na zunifikowanych równaniach BFKL/DGLAP daje najwyższe przewidywania w obszarze $E > 10^6 \text{ GeV}$. Jest

to związane z silnym potęgowym wzrostem, typu $x^{-\lambda}$, funkcji rozkładu gluonów generowanym przez jądro BFKL. Z kolei przewidywanie oznaczone GBW daje najmniejsze wartości, ze względu na obecność poprawek saturacyjnych w modelu, które zaczynają być istotne przy energiach rzędu $E_c > 10^6$ GeV.

Rysunek 14 po prawej stronie pokazuje Z -moment dla zderzeń proton-jądro oszacowany na podstawie uogólnionego modelu GBW zawierającego cieniowanie jądrowe na podstawie wzoru (51).

6.2 Strumienie neutrin

Aby wyliczyć strumienie neutrin, należy rozwiązać równania transportu w atmosferze ziemskiej dla cząstek w funkcji tak zwanej gęstości kolumnowej X

$$X = \int_h^\infty \rho(h') dh', \quad (53)$$

gdzie $\rho(h)$ jest gęstością atmosfery na wysokości h .

Neutrino są produkowane w następującej sekwencji procesów: zderzenie protonu promieniowania kosmicznego z jądrem atmosfery, produkcja par ciężkich kwarków $c\bar{c}$ ($b\bar{b}$), fragmentacja kwarku $c(b)$ na hadron, rozpad hadronu dający w wyniku neutrina. Należy uwzględnić jeszcze możliwość elastycznego oddziaływania protonów, jak również oddziaływania hadronów (powabnych i pięknych) przed ich rozpadem.

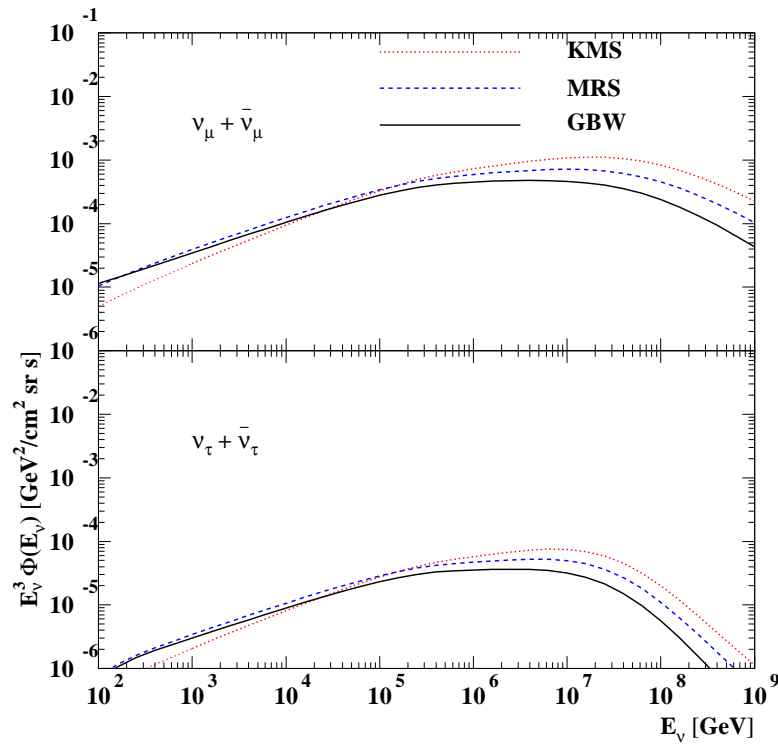
Generalnie, postać równań transportu opisujących powyższą sekwencję jest następująca

$$\frac{\partial \phi_\beta(E, X)}{\partial X} = \sum_\alpha \mathcal{M}_{\alpha \rightarrow \beta} \otimes \phi_\alpha(E, X). \quad (54)$$

$\phi_\beta(E, X)$ jest strumieniem cząstek rodzaju β , $\mathcal{M}_{\alpha \rightarrow \beta}$ opisuje prawdopodobieństwo przejścia cząstek α w β (przekrój czynny na produkcję cząstek β w wyniku oddziaływania cząstek α lub prawdopodobieństwo rozpadu α na β), natomiast splot \otimes jest w energii strumienia pierwotnego cząstek α . Przekrój czynny na produkcję par $c\bar{c}$ wyliczony w poprzednim rozdziale został użyty jako element $\mathcal{M}_{p \rightarrow c}$ w równaniach transportu (54).

Na rysunku 15 zostały pokazane strumienie neutrin ν_μ i ν_τ obliczone z rozwiązania równań transportu (54). Strumień neutrin elektronowych ν_e jest równy strumieniowi neutrin ν_μ . Porównano trzy warianty obliczeń przekrojów czynnych $pp \rightarrow c\bar{c}$ opisane w poprzednim paragrafie: KMS, MRS i GBW.

Widać wyraźne różnice między poszczególnymi wariantami ekstrapolacji funkcji rozkładu gluonów w obszarze wysokich energii $E > 10^6$ GeV. Poprawki saturacyjne w tym obszarze są zatem istotne, i tak na przykład dla energii $E = 10^7$ GeV różnica między wariantem KMS a GBW wynosi około 2 razy. Spadek strumienia dla bardzo wysokich energii $E > 10^8$ GeV jest związany z wydłużoną drogą rozpadu dla hadronów powabnych i pięknych, które zaczynają oddziaływać z jądrami atmosfery zanim zdążą się rozpaść. To powoduje degradację ich energii i w konsekwencji obcięcie spektrum neutrin przy bardzo wysokich energiach, około 10^9 GeV.



Rysunek 15: Strumienie szybkich neutron $\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$ oraz $\nu_\tau + \bar{\nu}_\tau$ wyliczone na podstawie trzech różnych modeli dla przekroju czynnego na produkcję $pp \rightarrow c\bar{c}$ w funkcji ich energii.

Dla porównania pokazano na rysunku 15 neutrona pochodzące również z rozpadu lekkich mezonów π, K . Jak wspomniano wcześniej, ze względu na oddziaływania tych mezonów w atmosferze strumień ten szybko spada z energią i dla energii $E > 10^5$ GeV dominują szybkie neutrony. W przypadku neutron ν_τ , jedynym źródłem (opócz opisanej produkcji) są oscylacje $\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau$. A zatem strumień neutron ν_τ powstających w atmosferze jest niewielki i stanowi znikome tło dla neutron ν_τ pochodzących ze źródeł ekstragalaktycznych.

7 Zakończenie

Poniżej przedstawię podsumowanie najważniejszych wyników zawartych w publikacjach tej rozprawy:

- **Praca I:** Zaobserwowanie zależności całkowitego przekroju czynnego dla zderzenia wirtualnego fotonu z protonem od jednej zmiennej skalującej (skalowanie geometryczne dla małych wartości x Bjorkena). Zmienna ta jest stosunkiem kwadratu wirtualności fotonu oraz skali zależnej od x Bjorkena. Można tę skalę interpretować jako skalę saturacji charakterystyczną dla gęstych układów partonowych.

- **Praca II:** Zbadanie wpływu warunków brzegowych ze skalowaniem geometrycznym na ewolucję DGLAP. Pokazano, że w przypadku ustalonej wartości silnej stałej sprzężenia skalowanie jest zachowywane przez ewolucję DGLAP gdy wartość wykładnika skali saturacji w zależności od x jest większa niż pewna wartość krytyczna. W przypadku biegnącej stałej sprzężenia, skalowanie jest generalnie łamane, ale istnieje pewien obszar kinematyczny, w którym jest ono w dobrym przybliżeniu zachowywane.
- **Praca III:** Rozwiązanie nieliniowego równania ewolucji Balitskiego-Kovchegova w przybliżeniu nieskończonego hadronu ($1 + 1$ wymiarów). Pokazanie, że nieliniowość ma istotne znaczenie w tłumieniu dyfuzji do obszaru podczerwonego pędów poprzecznych. Zanalizowano równanie z biegnącą stałą sprzężenia oraz z warunkiem konstystencji w przybliżeniu $1 + 1$ wymiarów. Pokazano, że w przypadku biegnącej stałej sprzężenia równanie jest całkowicie stabilne ze względu na nieperturbacyjną regularyzację przy małych wartościach pędów.
- **Praca IV:** Numeryczna analiza rozwiązania równania Balitskiego-Kovchegova w $3 + 1$ wymiarach z pełną zależnością od parametru zderzenia. Pokazano, że początkowy profil w parametrze zderzenia nie jest zachowywany przez ewolucję i jest zmieniany na potęgowy nawet po infinitezymalnym kroku ewolucyjnym w rapidity. Pełne rozwiązanie posiada symetrię konforemną czego przejawem jest na przykład spadek amplitudy dla dużych rozmiarów dipoli. Pokazano, że mimo iż amplituda jest ograniczona $N \leq 1$ to rozwiązanie na dipolowy przekrój czynny nie spełnia warunku Froissarta-Martina. Potrzebna jest dodatkowa modyfikacja w postaci skali ucinającej długozasięgowe oddziaływanie obecne w równaniu Balitskiego-Kovchegova.
- **Praca V:** Przeprowadzono fenomenologiczną analizę danych na elastyczną, dyfrakcyjną produkcję mezonów wektorowych. Korzystając z danych eksperymentalnych na przekrój czynny na ten proces i jego zależności od przekazu pędu t , wyliczono element macierzy S w zależności od parametru zderzenia i dla ustalonej energii. Procedura ta jest prawie całkowicie niezależna od modelu i umożliwia oszacowanie wielkości poprawek saturacyjnych w procesach głębokonieelastycznych przy wysokich energiach.
- **Prace VI i VII:** Zastosowanie modelu ewolucji partonowej z uwzględnieniem poprawek saturacyjnych do obliczeń przekroju czynnego na produkcję mezonów powabnych w zderzeniach wysokoenergetycznych cząstek promieni kosmicznych z jądrami atmosfery. Uwzględniono zarówno saturację partonową na poziomie nukleonu jak i cieniowanie jądrowe. Pokazano znaczące różnice w przekrojach czynnych w zależności od przyjętego modelu rozkładu partonowych. Rozwiązano również pełne równania transportu i policzono wynikające z nich strumienie neutronów atmosferycznych powstałych w wyniku rozpadu mezonów powabnych oraz pięknych.

Podziękowania

Moje szczególne podziękowania kieruję w stronę Krzysztofa Golca-Biernata za niezliczone interesujące dyskusje oraz długoletnią i owocną naukową współpracę.

Składam również podziękowania dla moich współpracowników: Alana Martina, Leszka Motyki, Stephana Munier, Al Muellera, Mishy Ryskina.

Pragnę wyrazić wdzięczność pracownikom Zakładu Fizyki Teoretycznej Instytutu Fizyki Jądrowej w Krakowie za miłą atmosferę.

Dziękuję grupom teoretycznym w Istituto Nazionale di Fisica Nucleare we Florencji oraz DESY w Hamburgu za miłe przyjęcie oraz za stworzenie wspaniałych warunków do pracy naukowej.

Rozprawę dedykuję pamięci Jana Kwiecińskiego.

Spis literatury

- [1] L. N. Lipatov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **23** (1976) 338;
E. A. Kuraev, L. N. Lipatov, V. S. Fadin, *Sov. Phys. JETP* **45** (1977) 199;
I. I. Balitsky, L. N. Lipatov, *Sov. J. Nucl. Phys.* **28** (1978) 338.
- [2] ZEUS Collab., M. Derrick et al., *Phys. Lett.* **B 316** (1993) 412;
ZEUS Collab., M. Derrick et al., *Z. Phys.* **C 65**(1995) 379;
ZEUS Collab., M. Derrick et al., *Z. Phys.* **C 72**(1996) 399;
ZEUS Collab., S. Chekanov et al., *Eur. Phys. J.C* **21** (2001) 443;
H1 Collab., I. Abt et al., *Nucl. Phys.* **B 407** (1993) 515;
H1 Collab., S. Aid et al., *Nucl. Phys.* **B 470** (1996) 3;
H1 Collab., C. Adloff et al., *Nucl. Phys.* **B 497** (1997) 3;
H1 Collab., C. Adloff et al., *Eur. Phys. J.C* **13** (2000) 609;
H1 Collab., C. Adloff et al., *Eur. Phys. J.C* **21** (2001) 33.
- [3] V. S. Fadin, M. I. Kotsky, R. Fiore, *Phys. Lett.* **B 359**, 181 (1995);
V. S. Fadin, M. I. Kotsky, L. N. Lipatov, BUDKERINP-96-92, hep-ph/9704267;
V. S. Fadin, R. Fiore, A. Flachi, M. I. Kotsky, *Phys. Lett.* **B 422**, 287 (1998);
V. S. Fadin, L. N. Lipatov, *Phys. Lett.* **B 429**, 127 (1998);
G. Camici, M. Ciafaloni, *Phys. Lett.* **B 386**, 341 (1996); *Phys. Lett.* **B 412**, 396 (1997) [Erratum-ibid. **B 417**, 390 (1997)]; *Phys. Lett.* **B 430**, 349 (1998).
- [4] L. V. Gribov, E. M. Levin, M. G. Ryskin, *Phys. Rep.* **100** (1983) 1.
- [5] M. Froissart, *Phys. Rev.* **D 123** (1961) 1053.
- [6] A. Martin, *Phys. Rev.* **129** (1963) 1432.
- [7] W. Heisenberg, *Z. Phys.* **C 133**(1952) 65.

- [8] P.D.B. Collins, *An introduction to Regge theory and high energy physics*, Cambridge Univ. Pr.
- [9] K. Golec-Biernat, M. Wüsthoff, *Phys. Rev.* **D59** (1999) 014017; *Phys. Rev.* **D60** (1999) 114023; *Eur. Phys. J.* **C20** (2001) 313.
- [10] L. McLerran, R. Venugopalan, *Phys. Rev.* **D49** (1994) 2233; *ibid.* **D49** (1994) 3352; *ibid.* **D50** (1994) 2225;
 J. Jalilian-Marian, A. Kovner, L. McLerran, H. Weigert, *Phys. Rev.* **D55** (1997) 5414; R. Venugopalan, *Acta Phys. Polon.* **B30** (1999) 3731;
 E. Iancu, A. Leonidov, L. McLerran, *Nucl. Phys.* **A692** (2001) 583;
 E. Ferreira, E. Iancu, A. Leonidov, L. McLerran, *Nucl. Phys.* **A 701** (2002) 489;
 E. Iancu, R. Venugopalan, hep-ph/0303204.
- [11] J. Jalilian-Marian, A. Kovner, A. Leonidov, H. Weigert, *Nucl. Phys.* **B 504** (1997) 415; *Phys. Rev.* **D 59** (1999) 014014. J. Jalilian-Marian, A. Kovner, H. Weigert, *Phys. Rev.* **D 59** (1999) 014015.
- [12] I. I. Balitsky, *Nucl. Phys.* **B463** (1996) 99; *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 2024; *Phys. Rev.* **D60** (1999) 014020; *Phys. Lett.* **B518** (2001) 235;
- [13] Yu. V. Kovchegov, *Phys. Rev.* **D60** (1999) 034008.
- [14] A.D. Martin, R.G. Roberts, W.J. Stirling, R.S. Thorne, *Eur. Phys. J.C* **28** (2003) 455.
- [15] E. Iancu, K. Itakura, L. McLerran, *Nucl. Phys.* **A 708** (2002) 327.
- [16] A. H. Mueller, *Nucl. Phys.* **B415** (1994) 373.
- [17] J. Bartels, H. Lotter, *Phys. Lett.* **B 309** (1993) 400.
- [18] B. Andersson, G. Gustafson, H. Kharraziha, *Phys. Rev.* **D 57** (1998) 5543.
- [19] R.J. Glauber, *Phys. Rev.* **100** (1955) 242.
- [20] A. H. Mueller *Nucl. Phys.* **B 335** (1990) 115.
- [21] A. Kovner, U.A. Wiedemann, *Phys. Rev.* **D 66** (2002) 051502; *Phys. Rev.* **D 66** (2002) 034031; *Phys. Lett.* **B 551** (2003) 311.
- [22] L. N. Lipatov, *Sov. Phys. JETP* **63** (1986) 904
- [23] E. Gotsman, E. Levin, M. Lublinsky, U. Maor, *Eur. Phys. J.C* **27** (2003) 411.
- [24] H.G. Dosch, T. Gousset, G. Kulzinger, H.J. Pirner, *Phys. Rev.* **D 55** (1997) 2602; G. Kulzinger, H.G. Dosch, H.J. Pirner, *Eur. Phys. J.C* **7** (1999) 73.
- [25] J. Nemchik, N.N. Nikolaev, B.G. Zakharov, *Z. Phys.* **C 341**(1994) 228.

- [26] J. Nemchik, N.N. Nikolaev, E. Predazzi, B.G. Zakharov, *Eur. Phys. J.C* **16** (2000) 641.
- [27] D.F. Torres, L.A. Anchordoqui, astro-ph/0402371.
- [28] T.K. Gaisser, *Cosmic rays and particle physics*, Cambridge Univ. Press, 1992.
- [29] C.G.S. Costa, *Astropart. Phys.* **16** (2001) 193.
- [30] J. Kwieciński, A.D. Martin, A.M. Staśto, *Phys. Rev.* **D56** (1997) 3991.